Corso di Geometria I

Appello del 5/9/2016

La durata della prova è di 3 ore.

Esercizio 1.

Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ e sia $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & A \end{array}\right) \in M(2n, \mathbb{R})$.

(a) Si provi che $\operatorname{rk} M = \operatorname{rk} A$.

(b) Si provi che il polinomio caratteristico di M è $p_M(t) = (-1)^n\, t^n\, p_{2A}(t)$.

(c) Se $A = \begin{pmatrix} h & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui M è diagonalizzabile.

(d) Si determini la forma di Jordan di M nel caso in cui A è nilpotente (supponendo nota la forma di Jordan di A).

Esercizio 2.

Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

(a) Se $V = \mathbb{R}_3[x]$, si considerino i tre funzionali f_1, f_1, f_3 di V^* definiti da

$$f_1(p) = p(1) \quad \forall p \in V, \qquad f_2(p) = p(-1) \quad \forall p \in V,$$

$$f_3(a + bx + cx^2 + dx^3) = 2a + 4b + 2c + 4d \qquad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

e sia $W = \operatorname{Span}(f_1, f_1, f_3) \subset V^*$. Siano Φ e ψ due prodotti scalari su V tali che W coincide sia con lo spazio dei funzionali di V^* Φ-rappresentabili per mezzo di vettori di V, sia con lo spazio dei funzionali di V^* ψ-rappresentabili per mezzo di vettori di V. Se Φ e ψ non sono semidefiniti allora sono isometrici.

(b) Sia (V, Φ) uno spazio euclideo di dimensione n. Sia $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo triangolabile con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non necessariamente distinti). Se $\operatorname{tr}(f^* \circ f) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2$, allora f è autoaggiunto rispetto a Φ.

(c) Siano k, n due numeri naturali fissati tali che $2 \leq k \leq n$. Allora esiste $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ tale che $\operatorname{rk} f = k - 1$, $m_f(t) = t^k$ e $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) \neq 1$ (dove $m_f(t)$ denota il polinomio minimo di f).

Esercizio 3.

Sia $\mathcal{D}$ la conica di $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Sia $\mathcal{C} = \varphi^{-1}(\mathcal{D})$, dove φ è l'affinità di $\mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(x, y) = (x + y + 1, x + 2y + 1)$.

(a) Si verifichi che i punti $P = (1, -1)$ e $Q = (-\frac{3}{\sqrt{2}} - 1, \sqrt{2})$ appartengono al supporto di $\mathcal{C}$.

(b) Si determinino le intersezioni del supporto di $\mathcal{C}$ con la retta r di equazione $y = \sqrt{2}$.

(c) Si determinino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste un'affinità f di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, $f(P) = Q$, $f(Q) = P$ e $f(r) = s_\alpha$, dove s_α è la retta di equazione $x + y + \alpha = 0$. Fissato uno di tali valori di α, si costruisca esplicitamente una affinità f con le proprietà suddette.