Anno Accademico 2015/2016
Geometria 1
Prova scritta del 16/2/2017

Esercizio 1.

Sia (V, ϕ) uno spazio euclideo di dimensione n e sia ψ un altro prodotto scalare su V. Data $\mathcal{B}$ una base di V, sia $P_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}[t]$ il polinomio dato da $P_{\mathcal{B}}(t) = \det(B - tA)$, dove A è la matrice di ϕ nella base $\mathcal{B}$ e B è la matrice di ψ nella base $\mathcal{B}$.

a) Dimostrare che $P_{\mathcal{B}}$ è un polinomio di grado n completamente fattorizzabile su $\mathbb{R}$, le cui radici e rispettive molteplicità algebriche non dipendono da $\mathcal{B}$.

Supponiamo adesso che ψ sia non degenere e poniamo:

$$U = \{f \in \mathrm{End}(V) |\ f \text{ è autoaggiunta sia rispetto a } \phi, \text{ sia rispetto a } \psi\}.$$

b) Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$ di dimensione maggiore o uguale a n.

c) Nel caso $V = \mathbb{R}^3$, ϕ il prodotto scalare standard, $\mathcal{B}$ la base canonica e ψ un prodotto scalare tale che $P_{\mathcal{B}}(t) = (t-1)^2(t-2)$, calcolare $\dim U$.

Esercizio 2.

Siano $n \geq 2$ un intero, f un endomorfismo di $\mathbb{C}^n$ e λ un numero complesso.

a) Mostrare che se esiste un intero $k \geq 2$ tale che $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda id)^k = k \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda id)$, allora per ogni intero h, $1 \leq h \leq k$, $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda id)^h = h \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda id)$.

b) Nel caso in cui f sia nilpotente con indice di nilpotenza s, determinare tutte le possibili forme canoniche di Jordan per f se $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Im}\, f^{s-1}$.

c) Nel caso in cui $n = 6$ e Spettro$(f) = \{1, -1\}$, determinare i possibili polinomi minimi di f se $\dim \mathrm{Ker}(f - id)^2 = 2 \dim \mathrm{Ker}(f - id)$ e $\dim \mathrm{Ker}(f + id)^3 = 3 \dim \mathrm{Ker}(f + id)$.

Esercizio 3. Sia C la conica di $\mathbb{R}^2$ di equazione $xy - 1 = 0$.

a) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la conica C_α di $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^2 + (\alpha - 1)y^2 + 2xy - 4x - 2y + \alpha + 2 = 0$ è affinemente equivalente a C.

b) Determinare le affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che $f(C) = C$.

Sia R l'insieme delle rette di $\mathbb{R}^2$. Su R, consideriamo la relazione di equivalenza data da:

$$\text{se } l, r \in R,\ l \approx r \iff \exists f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ affinità tale che } f(C) = C \text{ e } f(l) = r.$$

c) Mostrare che la famiglia delle rette per l'origine è data dall'unione di tre classi di equivalenza.

d) Determinare la classe di equivalenza della retta di equazione $x = 2$.

e) Mostrare che le tangenti a C formano una classe di equivalenza.