Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Appello del 8/9/2015

La durata della prova è di 3 ore.

Esercizio 1. Per ogni $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ sia $f_{A,B} \colon M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R})$ l'applicazione definita da $f_{A,B}(X) = AX - XB$.

(a) Si verifichi che $f_{A,B}$ è lineare.

(b) Si determini l'insieme delle coppie $(A, B) \in M(n, \mathbb{R}) \times M(n, \mathbb{R})$ per cui $f_{A,B} = 0$.

(c) Si provi che, se A e B sono simili, allora $f_{A,B}$ non è un isomorfismo.

(d) Fissato $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} h+1 & -1 \\ h^2 - h & 2-h \end{pmatrix}$,si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $f_{A,B}$ è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia n un numero naturale assegnato. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia e sia Φ un prodotto scalare su V di segnatura $(h, n-h, 0)$.

(a) Si verifichi che

$$E = \{f \in \operatorname{End}(V) \mid \Phi(f(v), w) = \Phi(v, f(w)) \quad \forall v, w \in V\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{End}(V)$ e se ne calcoli la dimensione.

(b) Si determinino i valori di h per cui ogni $f \in E$ è triangolabile.

(c) Si provi che, se $f \in E$, allora $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.

(d) Si provi che, se $f \in E$, allora $\Phi|_{\operatorname{Ker} f}$ è non degenere se e solo se $\Phi|_{\operatorname{Im} f}$ è non degenere.

Esercizio 3. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

(a) Sia $A \in O(3)$ una matrice non diagonalizzabile. Allora esiste $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $\{v, Av, A^2v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Ogni conica non degenere passante per i vertici di un triangolo di $\mathbb{R}^2$ e per il suo baricentro è un'iperbole.
(Si ricorda che il baricentro di tre punti P_1, P_2, P_3 è il punto $B = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3$.)

(c) Siano H_1, H_2, H_3 tre rette distinte di $\mathbb{R}^2$ e per $i = 1, 2, 3$, sia ρ_i la riflessione ortogonale rispetto alla retta H_i. Allora $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ è una riflessione se e solo se le tre rette sono parallele.

(d) Sia $r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2 + t,\ y = -1 + 2t,\ z = 3 - t,\ t \in \mathbb{R}\}$ e sia $Q = (4, -1, -1)$. Esiste una retta s di $\mathbb{R}^3$ passante per Q e tale che la distanza $d(r, s)$ fra r e s vale 4.