A. A. 2009/2010
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito del 8/2/2010

Esercizio 1
Dato il prodotto scalare φ su $\mathbb{R}^4$ dato da $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siano

$W_1 = \mathrm{Span}\{(-1,5,3,-4),(1,0,2,-1)\}^{\perp}$, $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | \ x+y-z+t = 0,\ x+2z+t = 0\}$.

1) Calcolare l'indice di Witt di φ.
2) Dire se W_1 e W_2 sono φ-isometrici.
3) Calcolare le possibili forme canoniche di Jordan per un endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con un solo autovalore tali che W_1 e W_2 sono f-invarianti e le restrizioni di f a W_1 e W_2 sono entrambe non diagonalizzabili.

Esercizio 2
Per $a, b \in \mathbb{R}$, sia $C_{a,b} \subset \mathbb{R}^2$ la conica di equazione $axy + b(x+y)(x+y-1) = 0$.
1) Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $C_{a,b}$ è degenere.
2) Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, determinare il tipo affine di $C_{a,b}$.
3) Mostrare che esistono un punto $p \in \mathbb{R}^2$ e una retta $r \subset \mathbb{R}^2$ passante per p tali che $p \in \mathbb{C}_{a,b}$ e r è tangente in p a $C_{a,b}$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.
4) Mostrare che tra le coniche $C_{a,b}$ esite un'unica circonferenza.
Sia adesso, per $a, b \in \mathbb{R}$, $D_{a,b} \subset \mathbb{R}^2$ la conica di equazione $a(x+y-2)(y-1)+b(x-y)(x-y-2) = 0$.
5) Restano veri i punti 3) e 4) per le coniche $D_{a,b}$?

Durata: ore 2:30.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.