CORSO di LAUREA in FISICA – GEOMETRIA I
Compito del 7/6/2010, A. A. 2009/2010

Esercizio 1

Sia $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R})$ e sia $H = \{A \in M(2,\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

(a) Verificare che H è un sottospazio vettoriale di $M(2,\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

(b) Costruire un endomorfismo $f\colon M(2,\mathbb{R}) \to M(2,\mathbb{R})$ tale che:
- $\mathrm{rk} f = 2$
- H è un autospazio per f
- $f\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$
- f non è diagonalizzabile.

Esercizio 2

Sia $M \in M(3,\mathbb{R})$ una matrice tale che ${}^tM = M$ e siano $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ gli autovalori di M. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $b_\lambda\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare associato alla matrice $M - \lambda\,\mathrm{Id}$, .

(a) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, determinare l'indice di nullità $i_0(b_\lambda)$ di b_λ.

(b) Dire per quali $p \in \{0,1,2,3\}$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che b_λ abbia segnatura $(p, 3-p, 0)$.

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti, dire se è vera o falsa, motivando la risposta.

(a) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ e $c\colon V \times V \to \mathbb{R}$ due prodotti scalari tali che:
- b è definito positivo
- per ogni $v, w \in V$ si ha $b(v,w) = 0$ se e solo se $c(v,w) = 0$.

Allora c è definito positivo oppure è definito negativo.

(b) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo tale per ogni base $\mathcal{B}$ di V la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ associata a f nella base $\mathcal{B}$ è triangolare superiore. Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f = \lambda\,\mathrm{Id}$.

(c) Esiste una applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f$.

Durata: 2:30 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.