ANNO ACCADEMICO 2009/2010
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Primo compitino 25/3/2010

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e sia φ un prodotto scalare su V (non necessariamente non degenere). Sia $F : V \to V^*$ l'applicazione lineare tale che $F(v)(w) = \varphi(v, w)$ per ogni $v, w \in V$.
1) Dimostrare che dati $f, g \in V^*$, esiste $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ tale che $g = \lambda f$ se e solo se $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}\, g$.
2) Dato il funzionale $f \in \mathrm{Im} F$, $f \neq 0$ (f è rappresentabile tramite φ), dimostrare che esiste $v \in V$ isotropo tale che $f = F(v)$ se e solo se $\dim(\mathrm{Rad}\varphi_{|_{\mathrm{Ker} f}}) > \dim \mathrm{Rad}\, \varphi$.

Esercizio 2

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Supponiamo che per ogni $\lambda \in \mathrm{Spettro}(f)$ esisita $k \geq 2$ tale che (*) $\dim(\mathrm{Ker}\,(f - \lambda id)^k) \leq 2$ e $\dim(\mathrm{Ker}\,(f - \lambda id)^{k+1}) \geq 2$.
Dimostrare che se V ha dimensione dispari, esiste almeno un $\lambda \in \mathrm{Spettro}(f)$ tale che $k = 2$ è l'unico intero per cui valgano le ipotesi (*).

Durata: 2 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, e numero di matricola.