A. A. 2008/2009
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compitino del 2/4/2009

Esercizio 1.
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo e ${}^t f \in \mathrm{End}(V^*)$ l'endomorfismo trasposto.
Dimostrare che $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = V$ se e solo se $\mathrm{Ker}\ {}^t f \oplus \mathrm{Im}\ {}^t f = V^*$.

Esercizio 2.
Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito da $\varphi(X, Y) = {}^t XAY$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, sia f_α il funzionale su $\mathbb{R}^4$ definito da

$$f_\alpha(x, y, z, t) = (\alpha^2 + 2)x + (\alpha - 2)y + \alpha^2 z - 3\alpha t$$

per ogni $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
Per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f_α è rappresentabile tramite φ, trovare un vettore che lo rappresenti.

Esercizio 3.
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$ e sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo. Dimostrare che i sottospazi di V f-invarianti formano un insieme finito se e solo se il grado del polinomio minimo di f è uguale alla dimensione di V.