ANNO ACCADEMICO 2008/2009

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I

Primo compitino 11/11/2008

Esercizio 1.

Sia $W \subset M(2,3,\mathbb{R})$ il sottoinsieme definito da

$$W = \{A \in M(2,3,\mathbb{R}) \mid Av = 0,\ \mathrm{tr}(AP) = 0,\ \mathrm{tr}(QA) = 0\}$$

dove $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione $f_h : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ definita come segue:

$\forall p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x],\ f_h(p(x)) = (hp(1) + p(-1), p'(1), ha + (h+1)b - c)$.

(1) Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $M(2,3,\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

(2) Verificare che f_h è lineare per ogni $h \in \mathbb{R}$.

(3) Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, W è isomorfo a $\mathrm{Im} f_h$?

Esercizio 2.

Sia V uno spazio vettoriale e siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali tali che $U \subset W$. Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare e sia $Z = W \cap \mathrm{Ker} f$.

(a) Dimostrare che $U + Z = W$ se e solo se $f(U) = f(W)$.

(b) Dimostrare che $U \oplus Z = W$ se e solo se $f(U) = f(W)$ e $f_{|_U}$ è iniettiva.

(c) Nel caso particolare in cui $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z - 3t = 0\}$ e $U = \mathrm{Span}\{(1,1,0,1),(0,2,1,1)\}$, costruire una applicazione lineare f tale che $\dim \mathrm{Im} f = 2$ e $U \oplus Z = W$.

Durata: 2 ore.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.