ANNO ACCADEMICO 2005/2006

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I

Compito del 7/2/2006

Esercizio 1

Consideriamo la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Sia $f : {}_2\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$f(A) = \big(\mathrm{tr\,A}, \mathrm{tr\,(AB)}\big) \qquad \forall \mathrm{A} \in {}_2\mathbb{R}_2.$$

1) Determinare una base di $\mathrm{Ker}\, f$.

2) Determinare una base di $S(2) \cap \mathrm{Ker}\, f$, dove $S(2)$ è il sottospazio di ${}_2\mathbb{R}_2$ delle matrici simmetriche.

3) Costruire una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to {}_2\mathbb{R}_2$ tale che l'endomorfismo $g \circ f : {}_2\mathbb{R}_2 \to {}_2\mathbb{R}_2$ abbia autovalori 0, 1 e 2.

Esercizio 2

Siano V, W e Z tre spazi vettoriali reali di dimensioni rispettivamente m, n e p.

1) Dire per quali m, n e p esistono due applicazioni lineari $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ tali che $g \circ f$ è iniettiva.

2) Dire per quali m, n e p esistono due applicazioni lineari $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ tali che $g \circ f$ è surgettiva.

Esercizio 3

Consideriamo le due matrici simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Siano ϕ e ψ i prodotti scalari su $\mathbb{R}^3$ dati da

$$\phi(X,Y) = {}^t XAY, \qquad \psi(X,Y) = {}^t XBY \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3.$$

1) Calcolare le segnature di ϕ e ψ.

2) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale per ϕ e ortogonale per ψ.

ANNO ACCADEMICO 2005/2006

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA II

Compito del 7/2/2006

Esercizio 1

Sia $V = {}_2\mathbb{R}_2$. Data $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ siano $f, g \in V^*$ tali che $f(A) = a + d$, $g(A) = a$.

Sia $U = \text{Span}\ (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix})$ e sia $W = \text{Span}\ (\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$

Costruire un prodotto scalare non degenere φ su V con indice di Witt pari a 2 e tale che valgano tutte le proprietà seguenti:

1) il funzionale f sia rappresentato tramite φ da $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) il funzionale g sia rappresentato tramite φ da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) U e W siano φ-isometrici.

Esercizio 2

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare la forma canonica di Jordan della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 1 & \alpha & \alpha & -1 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia $C_{a,b} \subset \mathbb{R}^2$ la conica di equazione $ax^2 + y^2 + 2xy + 2bx + 2y + a = 0$.

1) Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ $C_{a,b} \neq \emptyset$?

2) Dimostrare che non esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $C_{a,b}$ sia affinemente equivalente ad una coppia di rette parallele.

3) Determinare l'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche $C_{a,b}$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

4) Esistono $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $C_{a,b}$ è un'ellisse di centro $(1, -2)$?

5) Esistono $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $C_{a,b}$ è un'ellisse con asse di simmetria la retta $x = y$?