CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I E II
Compito del 5/7/2006

Esercizio 1. (G1)
Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Si considerino le applicazioni lineari $f : {}_2\mathbb{R}_2 \to {}_2\mathbb{R}_2$ e $D : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definite da

$$f(A) = A + {}^tA \qquad\qquad D(p(x)) = \frac{dp}{dx}(x).$$

a) Determinare il polinomio minimo di f e quello di D.
b) Costruire una applicazione lineare $g : {}_2\mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$g \circ f = 0 \quad \text{e} \quad \dim \operatorname{Im}(D \circ g) = 1.$$

Esercizio 2. (G1)
Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n. Ricordiamo che, se f è diagonalizzabile e W è un sottospazio vettoriale f-invariante di V, la restrizione $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile.

a) Provare che, se f è diagonalizzabile e W è un sottospazio vettoriale f-invariante di V, esiste una base di V di autovettori per f che contiene una base di W.
b) Siano U, W due sottospazi f-invarianti di V tali che $V = U + W$. Provare che, se gli endomorfismi $f|_U$ e $f|_W$ sono diagonalizzabili, allora f è diagonalizzabile.
c) Siano U, W due sottospazi f-invarianti di V con $\dim U = \dim W = n - 1$ e $U \neq W$. È vero che se $f|_{U\cap W}$ è diagonalizzabile, allora anche f lo è?

Esercizio 3. (G1, G1+2)
Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare tutte le segnature (i_+, i_-, i_0) che si possono realizzare per mezzo di prodotti scalari su $\mathbb{R}^3$ per i quali v_1, v_2, v_3 sono isotropi.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II e Vecchio ordinamento.
Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I E II
Compito del 5/7/2006

Esercizio 4. (G2, G1+2)

Per $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, sia

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

e sia φ_λ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^5$ dato da $\varphi_\lambda(X,Y) = {}^tXM_\lambda Y$, per ogni $X,Y \in \mathbb{R}^5$.

(1) Determinare una decomposizione di Witt di φ_λ.
(2) Determinare l'aggiunta tramite φ_λ di $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ data da $f(x,y,z,t,w) = (x, 2y, 3z, 4t, 5w)$ per ogni $(x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5$.
(3) Rappresentare tramite φ_λ il funzionale $F \in (\mathbb{R}^5)^*$ dato da $F(x,y,z,t,w) = (x + 2y + 3z + 4t + 5w)$ per ogni $(x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5$.

Esercizio 5. (G2, G1+2)

Sia $A \in {}_n\mathbb{C}_n$. Dimostrare che A e ${}^tA$ sono simili.

Esercizio 6. (G2, G1+2)

Sia $S \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dalla conica di equazione $25x^2+5y^2+22xy-28x-12y = -4$ e dal segmento di estremi $(2,-4)$ e $(4,-10)$ e sia $S' \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme formato dalla conica di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$ e dal segmento di estremi $(1,3)$ e $(1,a)$ per $a \in \mathbb{R}$.

(1) Dare condizioni necessarie e sufficienti per cui esista una affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(S) = S'$.
(2) Nel caso una f come al punto (1) esista, dimostrare che esistono esattamente due affinità che mandano S in S'.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II e Vecchio ordinamento.
Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.