A. A. 2005/2006
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II
Compito del 18/01/2006

Esercizio 1(G1, R1)
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha x + (1-\alpha)y - \alpha z &= 1 \\ 2y + 3z &= \alpha \\ (\alpha - 1)x + (3-\alpha)y + (3+\alpha)z &= \alpha + 1 \end{cases}$$

Esercizio 2(G1, R1)

Sia $V = {}_n\mathbb{R}_n$ e, dato $v \in \mathbb{R}^n$, definiamo $F_v : V \to \mathbb{R}^n$ tramite la formula $F_v(A) = Av$ per ogni $A \in V$. Sia $W = \{A \in V |\ A + {}^tA \in \mathrm{Span}(I)\}$.

1) Verificare che W è un sottospazio di V
2) Verificare che F_v è lineare per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.
3) Per quali $v \in \mathbb{R}^n$ l'applicazione F_v è surgettiva?
4) Per quali $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{R}^n$, W è isomorfo a $\mathrm{Ker}F_v$?

Esercizio 3(G1, R2)
Sia $V = {}_n\mathbb{R}_n$ e sia φ il prodotto scalare su V dato da $\varphi(B, C) = \mathrm{tr}({}^tBC)$ per ogni $B, C \in V$. Fissata $A \in V$, sia $f_A : V \to V$ l'endomorfismo tale che $f_A(X) = AX$ per ogni $X \in V$.

1) Verificare che φ è definito positivo.
2) Provare che $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di $A \iff \lambda$ è autovalore di f_A.
3) Provare che se A è simmetrica allora f_A è φ-autoaggiunta.
4) Per $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare una base φ-ortonormale di V costituita da autovettori di f_A.

Esercizio 4(G1, R2)
Siano $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 2, 3)$, $v_3 = (1, -1, -1)$, $v_4 = (1, 0, 0)$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = x + y\}$. Costruire, se esiste, un prodotto scalare Φ su $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Span}(v_1, v_2)^\perp = U$, v_3 è ortogonale a v_4 e $\varphi(v_1, v_1) = 4$. Tale prodotto scalare è unico?

Sigle dell'esame: G1 = Geometria 1 R1 = Recupero primo compitino; R2 = Recupero secondo compitino Durata: R1 e R2 2 ore; G1 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

A. A. 2005/2006
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II
Compito del 18/01/2006

Esercizio 5.(G2)
Per $a \in \mathbb{R}$, sia φ_a il prodotto scalare su $\mathbb{R}^5$ dato nella base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Per $a \neq 0$, determinare una decomposizione di Witt per φ_a.
2) Per quali $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\mathrm{Span}(e_1, e_2)^\perp$ è φ-isometrico a $\{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \mid x = y = w\}$?
3) Dimostrare che, fissato $v \in \mathbb{R}^5$, $v \neq 0$, i funzionali rappresentati da v tramite φ_a, formano, al variare di $a \in \mathbb{R}$, una retta affine L_v in $(\mathbb{R}^5)^*$. È vero che $\cup_{v \in R^5} \mathrm{Giac}(L_v) = (\mathbb{R}^5)^*$?

Esercizio 6.(G2)
Sia $f : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ un'applicazione lineare con polinomio minimo $\mu_f(x) = (x-1)(x-2)^2$.
Calcolare la forma canonica di Jordan di f nei seguenti casi:

1) la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è 3;
2) $\dim\mathrm{Ker}(f - 2id)^2 = 3$;
3) esistono infiniti sottospazi f-invarianti di dimensione 2 tali che la restrizione di f abbia polinomio caratteristico $(x-1)^2$;
4) non esiste un sottospazio f-invariante di dimensione 4 per cui la restrizione di f sia diagonalizzabile.

Esercizio 7.(G2)
Siano r, s due rette ortogonali in $\mathbb{R}^2$, sia $O = r \cap s$ e siano $A \neq B, A' \neq B' \in r$ tali che $\mathrm{dist}(A, O) = \mathrm{dist}(B, O)$, $\mathrm{dist}(A', O) = \mathrm{dist}(B', O)$. Siano $C, C' \in s$ tali che esista $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, con $O = aC + (1-a)C'$. Siano T e T' i triangoli $ABC, A'B'C'$ rispettivamente.
Dimostrare che esiste una affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(T) = T'$ e $f(T') = T$ se e solo se T e T' sono isometrici. In tal caso, determinare tutte le affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che $f(T) = T'$ e $f(T') = T$.