Foglio di Esercizi 1
Corso di Teoria Geometrica della Misura
Anno Accademico: 2012-2013

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
magnani@dm.unipi.it
Pisa, 8 Aprile 2013

1. Sia $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una misura sulla σ-algebra $\mathcal{A}$ e si consideri $\{A_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ con $E = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$.
   (a) Confutare con un controesempio la implicazione $\mu(E) = \limsup_{j\to\infty} \mu(A_j)$.
   (b) Se assumiamo inoltre che $\mu(A_j) < \mu(A_{j+1}) < +\infty$ per ogni $j \geq 1$, stabilire se puó valere $\mu(E) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

2. Mostrare che $\mathcal{L}^n$ è una misura d'insieme su $\mathbb{R}^n$.

3. Siano $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si mostri che per ogni $S \subset \mathbb{R}^n$ abbiamo
$$\mathcal{L}^n(x + S) = \mathcal{L}^n(S) \quad \text{and} \quad \mathcal{L}^n(\lambda S) = |\lambda|^n \mathcal{L}^n(S)\,.$$
Concludere che S è $\mathcal{L}^n$ misurabile se e solo se lo è $x + S$ e se e solo se lo è λS.

4. Sia μ una misura d'insieme su X, sia $A \subset X$. Provare che ogni insieme μ-misurabile è anche $\mu \llcorner A$-misurabile.

5. Sia $\zeta : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una gauge su $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ e sia $\lambda > 0$. Mostrare che la corrispondente funzione d'insieme ζ_λ è una misura d'insieme su X.

6. Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ una classe non vuota e sia $\tilde{\mu} : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ tale che per ogni $A, A_j \in \mathcal{F}$ ove $j \in \mathbb{N}$ e $A \subset \cup A_j$ si abbia $\mu(A) \leq \sum_{j\geq 0} \mu(A_j)$, $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $\mu(\emptyset) = 0$. Si definisca $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ come segue
$$\mu(S) = \inf\{\tilde{\mu}(A) : \ A \in \mathcal{F}, A \supset S\}\,.$$
Osservare che μ è monotona rispetto all'inclusione e provare che se la restringiamo ad $\mathcal{F}$ allora coincide con $\tilde{\mu}$.

7. Sia μ una misura regolare su X e si consideri $E_i \subset E_{i+1} \subset X$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Mostrare che
$$\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\Big) = \sup_{i\geq 0} \mu(E_i)\,.$$

8. Provare che l'estensione μ di una misura $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ su una σ-algebra $\mathcal{A}$ è unica nel senso seguente. Se ν è una misura $\mathcal{A}$-regolare su X e $\nu|_{\mathcal{A}} = \tilde{\mu}$, allora $\nu = \mu$.

9. Sia μ una misura su X e sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-algebra. Provare che se μ è $\mathcal{A}$-regolare e $A \in \mathcal{A}$, allora anche la restrizione $\mu \llcorner A$ è $\mathcal{A}$-regolare.