ESERCITAZIONE MATLAB 5: Fattorizzazione LU di una matrice quadrata

1. Si scriva una function Matlab che calcoli, se esistono, le matrici L ed U della fattorizzazione

$$A = LU$$

dove A è una matrice quadrata, L è una matrice triangolare inferiore con elementi diagonali tutti uguali ad 1 ed U è una matrice triangolare superiore.

Il seguente è un breve riassunto del metodo di eliminazione di Gauss per il calcolo di tale fattorizzazione. Al primo passo si pone:

$$A^{(1)} = A \equiv \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Per ogni $k = 1, 2, \dots, n-1,$, sia $A^{(k)} = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=1,\dots,n}$ la matrice fino a quel momento calcolata. Se risulta $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ allora si definisce il seguente vettore elementare di Gauss

$$\mathbf{g}_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} \Big(\underbrace{0, \dots, 0}_{k} \; a_{k+1,k}^{(k)} \; a_{k+2,k}^{(k)} \dots a_{nk}^{(k)} \Big)^T \equiv \Big(\underbrace{0, \dots, 0}_{k} \; g_{k+1,k} \; g_{k+2,k} \dots g_{nk} \Big)^T \tag{1}$$

e la seguente matrice elementare di Gauss

$$L_k = I - \mathbf{g}_k \mathbf{e}_k^T \tag{2}$$

dove I è la matrice identità di ordine n e $\mathbf{e}_k$ è il k-mo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. La matrice $A^{(k+1)}$ è quindi data da

$$\begin{aligned} A^{(k+1)} &= L_k\, A^{(k)} = \left(I - \mathbf{g}_k \mathbf{e}_k^T\right) A^{(k)} = A^{(k)} - \mathbf{g}_k \left(\mathbf{e}_k^T\, A^{(k)}\right) \\ &= A^{(k)} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{k+1,k} \\ g_{k+2,k} \\ \vdots \\ g_{nk} \end{pmatrix} \left(0 \dots 0\, a_{kk}^{(k)}\, a_{k,k+1}^{(k)} \dots a_{kn}^{(k)}\right). \end{aligned}$$

Da tale espressione si deduce che gli <u>unici</u> elementi della matrice $A^{(k+1)}$ che differiscono dai corrispondenti elementi della matrice $A^{(k)}$ sono quelli che appartengono alla sottomatrice costituita dalle ultime $n-k$ righe e dalle ultime $n-k+1$ colonne. In particolare, per costruzione, si ha

$$a_{ik}^{(k+1)} = 0 \qquad \text{per ogni } i = k+1, \dots, n \tag{3}$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - g_{ik}\, a_{kj}^{(k)} \qquad \text{per ogni } i, j = k+1, \dots, n. \tag{4}$$

Si osservi che le equazioni in (3)-(4) possono essere riscritte in forma matriciale come segue

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,k}^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{nk}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{nn}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,k+1}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_{k+1,k} \\ \vdots \\ g_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Se la procedura può essere proseguita fino alla iterazione $n-1$ allora $A^{(n)}$ è triangolare superiore e coincide con il fattore U della fattorizzazione. Il fattore L è invece dato da, si vedano (1) e (2),

$$L = (L_{n-1} \cdots L_1)^{-1} = L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ g_{21} & 1 & & & \\ g_{31} & g_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Nella implementazione effettiva del metodo si utilizza una unica matrice `A` che all'inizio della k-ma iterazione contiene $A^{(k)}$ e viene quindi sovrascritta con $A^{(k+1)}$. Se la procedura viene portata a termine con successo allora alla fine `A` contiene il fattore U. Per quanto riguarda la matrice L, essa viene inizializzata come $L = I$ ed alla iterazione k-ma si memorizzano nelle sue opportune posizioni gli elementi significativi, ovvero diversi da zero, del vettore $\mathbf{g}_k$. I seguenti sono i principali passi dell'algoritmo da implementare:

(a) $L = I$;

(b) per $k = 1, 2, \dots, n-1$

   i. se $\mathtt{a}_{kk} = 0$ allora `stop,`

   ii. calcolo del k-mo vettore elementare di Gauss e memorizzazione delle sue componenti significative nelle opportune posizioni di L,

   iii. aggiornamento degli elementi di A appartenenti alle sue ultime $n-k$ righe e $n-k+1$ colonne utilizzando le equazioni (3)-(4) oppure le (5)-(6);

(c) $U = A$

2. Si applichi la function `fattLU` per calcolare la fattorizzazione LU di

$$A = FG, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

Quanto differiscono i fattori L ed U da F e G rispettivamente?

3. Si applichi la function `fattLU` alla seguente matrice e si spieghi il risultato ottenuto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 1 \\ 8 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE:

1.
```
function [L,U] = fattLU(A)

%  fattLU.m
%
%  [L,U] = fattLU(A)
%
%  Calcola la fattorizzazione
%
%  A = LU
%
%  con L triangolare inferiore a diagonale unitaria e U
%  triangolare superiore
%
%  Input:
%        A matrice da fattorizzare
%
% Output: L,U matrici triangolari della fattorizzazione.
%

  [m,n]=size(A);

  if m~= n,
     error('La matrice dei coefficienti non e'' quadrata')
  end

  L = eye(n);

  for k = 1:n-1

    if A(k,k)==0,
       error('La matrice non e'' fattorizzabile LU')
    end

%   Con la seguente istruzione si calcolano le componenti significative
%   del k-mo vettore elementare di Gauss  e le si memorizzano nelle
%   opportune posizioni della matrice L finale.
    L(k+1:n,k) = A(k+1:n,k)/A(k,k);

    A(k+1:n,k) = 0;

    A(k+1:n,k+1:n) = A(k+1:n,k+1:n) - L(k+1:n,k)*A(k,k+1:n);

  end

  U = A;
```

2.
```
>> F = [1 0 0 0;2 1 0 0;3 4 1 0; 5 6 7 1]

F =
     1     0     0     0
     2     1     0     0
     3     4     1     0
     5     6     7     1

>> G = [8 9 10 11;0 12 13 14; 0 0 15 16; 0 0 0 17]

G =
     8     9    10    11
     0    12    13    14
     0     0    15    16
     0     0     0    17

>> A=F*G;

>> [L,U]=fattLU(A)

L =
     1     0     0     0
     2     1     0     0
     3     4     1     0
     5     6     7     1

U =
     8     9    10    11
     0    12    13    14
     0     0    15    16
     0     0     0    17
```

   Si osserva che i fattori `L` ed `U` calcolati dalla function `fattLU` coincidono con le matrici `F` e `G`, rispettivamente. Questo fatto è in perfetto accordo con il Teorema di Unicità della fattorizzazione LU di una matrice non singolare.

3.
```
>> A=[1 2 3 0;2 5 6 0;3 7 9 1; 8 6 1 1]
A =
     1     2     3     0
     2     5     6     0
     3     7     9     1
     8     6     1     1

>> [L,U]=fattLU(A)
??? Error using ==> fattLU at 35
La matrice non e' fattorizzabile LU
```

   Il metodo di eliminazione di Gauss si arresta poichè risulta $a_{33}^{(3)} = 0$ dato che il minore principale di ordine 3 di A è zero. Tale minore è infatti il determinante della seguente sottomatrice di A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

che è singolare dato che la terza riga coincide con la somma delle prime due righe.