VARIETÀ QUIVER

ANDREA MAFFEI

I collegamenti tra teoria delle rappresentazioni e geometria sono stati sempre numerosi e fecondi. Il prototipo del collegamento a cui siamo interessati in questo seminario è dato dalla corrispondenza Springer. Nel 1976 Springer in [8] diede una costruzione delle rappresentazioni del gruppo di Weyl di un gruppo di Lie nella coomologia di dimensione massima di quella che poi sarebbe stata chiamata la fibra di Springer. Enunciamo questo importante risultato nel caso di A_{n-1}. Sia $\mathcal{N}$ la varietà degli elementi nilpotenti di $sl_n(\mathbb{C})$ e sia $\mathcal{F}$ la varietà delle bandiere complete. Se $F = 0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = \mathbb{C}^n$ è una bandiera completa e $x \in sl_n$ diciamo che x annulla F se $x(F_i) \subset F_{i-1}$. Osserviamo che $\mathcal{M} = T^*\mathcal{F}$ si può identificare con la varietà delle coppie $(x, F) \in \mathcal{N} \times \mathcal{F}$ tali che x annulla F. Possiamo quindi definire una proiezione $p : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ e il prodotto fibrato $Z = \mathcal{M} \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}$. In particolare osserviamo che p è propria e $\mathcal{M}$ è liscia. In questa situazione possiamo definire una struttura di algebra su $H_*(Z)$ nel seguente modo:

$$\alpha * \beta = p_{13*}(p_{12}^*(\alpha) \cap p_{23}^*(\beta))$$

dove per $i < j \in \{1, 2, 3\}$ p_{ij} è la proiezione di $Z_{ij} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{M}^3 : p(a_i) = p(a_j)\}$ sulla i-esima e j-esima componente, e $\cap$ è l'intersezione nello spazio ambiente (liscio e orientato) $\mathcal{M}^3$. Osserviamo che allo stesso modo si può definire una struttura di $H_*(Z)$-modulo su $H_*(p^{-1}(x))$ per ogni $x \in \mathcal{N}$. Nel nostro caso osserviamo inoltre che $H_{top}(Z)$ è una sottoalgebra di $H_*(Z)$ e che $H_{top}(p^{-1}(x))$ è un $H_{top}(Z)$-sottomodulo di $H_*(p^{-1}(x))$. La corrispondenza di Springer si può allora riformulare in questo modo (un'ottima referenza è per esempio il libro di Chriss e Ginzburg [2]):

Theorem 1 (Springer, Lusztig, Borho, MacPherson, Ginzburg)**.** *1)* $H_{top}(Z) \simeq \mathbb{C}[S_n]$*;*

2) per ogni $x \in \mathcal{N}$*,* $H_{top}(p^{-1}(x))$ *è una rappresentazione irriducibile di* $H_{top}(Z)$*;*

3) per ogni x, y *in* $\mathcal{N}$ *gli* $H_{top}(Z)$*-moduli* $H_{top}(p^{-1}(x))$ *e* $H_{top}(p^{-1}(y))$ *sono isomorfi se e solo se esiste* $g \in SL_n$ *tale che* $gxg^{-1} = y$*.*

Il punto 1) del teorema è ovviamente legato alla geometria delle varietà che abbiamo scelto ma la costruzione dell'algebra di convoluzione $H_*(Z)$, e la descrizione delle sue rappresentazioni irriducibili, almeno nel caso in cui la mappa sia proiettiva, seguono in gran parte un approccio molto generale. In particolare il fatto che $H_{top}(Z)$ sia una sottoalgebra di $H_*(p^{-1}(x))$ e che $H_{top}(p^{-1}(x))$ sia un $H_{top}(Z)$-sottomodulo è legato alla dimensione delle fibre della mappa p.

Può essere quindi utile ed interessante realizzare un'algebra come un algebra di convoluzione $H_{top}(Z)$ per una opportuni $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, p. In particolare il problema di costruire le algebre di Kac-Moody come algebre di convoluzione è stato risolto da Nakajima utilizzando le varietà quiver o più precisamente alcune speciali varietà quiver da lui definite [6, 7].

1. Varietà quiver e teorema di Nakajima

Sia $C = 2\mathrm{Id} - A$ una matrice di Cartan generalizzata simmetrica, $\mathfrak{g}$ la relativa algebra di Kac-Moody e $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ (resp. $\{\omega_i\}_{i\in I}$) un sistema di radici semplici (resp. pesi fondamentali per la scelta degli α_i). Per ogni peso $d = \sum d_i\omega_i$ e per ogni elemento del reticolo delle radici $v = \sum v_i\alpha_i$ consideriamo degli spazi vettoriali complessi D_i , V_i di dimensione d_i e v_i rispettivamente. Consideriamo quindi lo spazio vettoriale delle mappe lineari

$$S(d,v) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(D_i, V_i) \oplus \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(V_i, D_i) \oplus \sum_{i,j\in I} \mathrm{Hom}(V_i, V_j)^{\oplus a_{ij}}.$$

Osserviamo che l'azione di $GL(V_i)$ su V_i induce un'azione di $G = \prod GL(V_i)$ su $S(d,v)$. Lo spazio $S(d,v)$ ha una struttura simplettica naturale (in questo punto serve la simmetria della matrice A) per la quale esiste una mappa momento $\mu : S \longrightarrow Lie(G)^*$ tale che $\mu(0) = 0$. Sia $\Lambda(d,v) = \mu^{-1}(0)$ e un $\Lambda^s(d,v)$ un suo aperto (eventualmente vuoto) definito dalla seguente condizione di stabilità: $s \in S$ è stabile se esiste $n > 0$ e $f \in \mathbb{C}[S]$ tale che

$$f(gx) = \prod \det(g_i) f(x) \text{ per ogni } x \in S \text{ e per ogni } g = (g_i) \in G.$$

Le varietà quiver di Nakajima sono allora definite nel seguente modo:

$$M(d,v) = \Lambda^s(d,v)/G \qquad M_0(d,v) = \Lambda(d,v)//G.$$

In particolare l'azione di G su $\Lambda^s(d,v)$ è libera e la varietà $M(d,v)$ è liscia. È infine facile verificare che la mappa $p_{d,v} : M(d,v) \longrightarrow M_0(d,v)$ indotta dall'inclusione è proiettiva. Segue inoltre dalla costruzione che se $v' < v$ per ogni $i \in I$ allora $M_0(d,v') \hookrightarrow M_0(d,v)$. Si può quindi definire

$$M(d) = \coprod_v M(d,v), \qquad\qquad M_0(d) = \varinjlim_v M_0(d,v),$$
$$p_d = \coprod_v p_{d,v} : M(d) \longrightarrow M_0(d), \qquad Z(d) = M(d) \times_{M_0(d)} M(d).$$

Possiamo quindi anche in questo caso costruire l'algebra di convoluzione $H_*(Z(d))$ (in realtà nel caso non finito può succedere che $M_0(d)$ non sia una varietà e che $M(d)$ abbia un numero infinito di componenti connesse e che in particolare la mappa p non sia propria, ma questo problema è facilmente aggirabile). Uno dei principali risultati di Nakajima è il seguente:

Theorem 2 (Nakajima, [7]). *1) $H_{top}(Z(d))$ è una sottoalgebra di $H_*(Z(d))$ e $H_{top}(p_d^{-1}(x))$ è un $H_{top}(Z(d))$ sottomodulo di $H_*(p_d^{-1}(x))$;*

2) Esiste un morfismo di algebre $\Phi\colon U(\mathfrak{g}) \longrightarrow H_{top}(Z(d))$;

3) $H_{top}(p_d^{-1}(0))$ è la rappresentazione irriducibile di $U(\mathfrak{g})$ di peso più alto d;

4) La decomposizione in sottospazi peso di $H_{top}(p_d^{-1}(0))$ è data da

$$H_{top}(M(d)_0) = \bigoplus_v H_{top}(M(d,v)_0)$$

e $H_{top}(M(d,v)_0)$ ha peso $d - v$.

Osserviamo che $p_{d,v}^{-1}(0)$ è equidimensionale, in particolare al variare di v le classi fondamentali delle sue componenti irriducibili forniscono una base canonica della rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{g}$ di peso più alto d.

2. Geometria delle quiver varieties di tipo A

La geometria delle varietà quiver è ancora da capire. Nel caso delle quiver varieties di tipo A_{n-1} esiste una descrizione in termini di varietà di Slodowy.

Numeriamo i vertici di A_{n-1} nel modo usuale, fissiamo $d = \sum_{i=1}^{n-1} d_i\omega_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n-1}$ come nella sezione precedente e definiamo $N = \sum_{i=1}^{n-1} id_i$. Sia inoltre $\mathcal{N}$ la varietà degli elementi nilpotenti in $sl(N)$. Data una partizione a di N consideriamo la varietà delle bandiere parziali di tipo a in $\mathbb{C}^N$:

$$\mathcal{F}_a = \{0 = F_0 \subset F_1 \subset \ldots F_n = \mathbb{C}^N \,:\, \dim F_i = \dim F_{i-1} + a_i\}.$$

Osserviamo che come nel caso delle bandiere complete $T^*\mathcal{F}_a$ si può identificare con la varietà delle coppie $(x,F)\in sl_N\times\mathcal{F}_a$ tali che x annulla F. Possiamo quindi definire una proiezione $p_a : T^*\mathcal{F}_a \longrightarrow \mathcal{N}$. Sia $x\in\mathcal{N}$, a una partizione di N e x,y,h una $sl(2)$-tripla (eventualmente nulla), definiamo quindi le varietà di Slodowy di prima e seconda specie nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_x &= \{y\in\mathcal{N} \,:\, [y-x,h]=0\},\\ \widetilde{\mathcal{S}}_{a,x} &= p_a^{-1}(\mathcal{S}_x).\end{aligned}$$

Siano ora dati d e v definiamo la partizione $a=a(v,d)$ di N mediante

$$a_1 = d_1+\cdots+d_{n-1}-v_1, \qquad a_n = v_{n-1},$$
$$\text{e } a_i = d_i+\cdots+d_{n-1}-v_i+v_{i-1} \;\text{ per } i=2,\ldots,n-1.$$

La relazione tra le varietà quiver di tipo A e le varietà di Slodowy è dato dal seguente risultato congetturato in [6] e dimostrato in [5].

Theorem 3. *Sia $x\in\mathcal{N}$ un elemento nilpotente con forma di Jordan di tipo $1^{d_1}\dot{2}^{d_2}\cdots(n-1)^{d_{n-1}}$ allora esiste un isomorfismo di varietà algebriche $\varphi\colon M(d,v)\longrightarrow \mathcal{S}_{a(v,d),x}$ e un immersione chiusa $\psi\colon M_0(d,v)\longrightarrow \mathcal{S}_x$ tali che il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{tikzcd} M(d,v) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_{d,v}"'] & \widetilde{\mathcal{S}}_{a(v,d),x} \arrow[d, "p_{a(v,d)}"'] \\ M_0(d,v) \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{S}_x \end{tikzcd}$$

3. Riferimenti bibliografici

L'articolo originale sulla corrispondenza di Springer è un articolo di Springer del 1976 [8] ed usa metodi di caratteristica p. Il risultato di Springer è stato riformulato in molti modi equivalenti. Seguendo una idea di Lusztig, Borho e Mac Pherson ([1]) hanno fatto vedere come usare la teria dei fasci perversi per riottenere e generalizzare questo risultato. Una ottima referenza per il ruolo svolto dall'algebra di convoluzione nella teoria della rappresentazioni è il libro di Chriss e Ginzburg [2].

Le varietà quiver sono state utilizzate per la prima volta nello studio delle rappresentazioni dei quantum groups da Ringel e Lusztig. Le varietà alle quali ho accennato sono diverse da quelle usate da Ringel e Lusztig e sono state introdotte da Nakajima come generalizzazione dello spazio dei moduli degli istantoni su uno spazio ALE [6, 7]. Nel secondo di questi articoli Nakajima mostra anche come applicare queste varietà allo studio delle rappresentazioni delle algebre di Kac Moody.

Lusztig ha fatto vedere [3] come la fibra $p_{d,v}^{-1}(0)$ possa essere descritta nel caso di un quiver di tipo affine usando la corrispondanza di McKay e in un successivo articolo [4] ha fatto vedere come utilizzare le quiver varieties per ottenere una costruzione delle rappresentazioni dei gruppi di Weyl simile a quella di Springer.

References

[1] W. Borho and R. Mac Pherson, *Partial resolution of nilpotent varieties*, Analysis and topology on singular spaces II,III, Astérisque, vol. 101-102, 1983, pp. 23–74.

[2] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser, 1997.

[3] G. Lusztig, *On quiver varieties*, Advances in Math. **136** (1998), 141–182.

[4] ———, *Quiver varieties and Weyl group actions*, preprint, 1999.

[5] A. Maffei, *Quiver varieties of type a*, preprint available at `xxx.lanl.gov`.

[6] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. Jour. **76** (1994), 365–416.

[7] ———, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. Jour. **91** (1998), 515 – 560.

[8] T. Springer, *Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups*, Invent. Math. **36** (1976), 173–207.

Università di Roma "La Sapienza"

E-mail address: `amaffei@mat.uniroma1.it`