

TEORIA DI MORSE E PASSI DI MONTAGNA

FEDERICO ALIBERTI E ANDREA MAFFEI

Queste pagine costituiscono la versione scritta più o meno fedele di una lezione fatta ad alcuni studenti delle scuole superiori. Lo scopo della lezione era quello di illustrare qualche aspetto della topologia delle superfici e in particolare alcune considerazioni legate alla teoria di Morse. Non mi soffermerò sulla spiegazione delle proprietà della caratteristica di Eulero che mi sembra essere un argomento già presente nelle scuole e nei libri di matematica accessibili a ragazzi del liceo (per esempio è trattata nel libro di Courant e Robbins [1]). Ho scelto di non dare le linee della dimostrazione matematicamente più soddisfacente e più breve ma di quella che mi sembrava si potesse esprimere con dei disegni nel modo più convincente. Il materiale prende spunto da un articolo di Stewart [5] nel quale si accenna anche ad altri problemi a questo collegati. Un testo classico e molto bello in cui viene illustrata la teoria di Morse e la sua applicazione allo studio delle geodetiche è invece il libro di Milnor [3]. Un altro ottimo libro, non elementare ma più didattico del precedente, molto adatto per esempio per uno studente ai primi anni di università, e in cui si possono trovare illustrati in modo efficace molti concetti di topologia più avanzati è il libro di Dubrovin, Novikov e Fomenko [2].

Rilevazioni geografiche su quattro pianeti. Quattro missioni spaziali sono state lanciate per esplorare quattro pianeti della nostra galassia. Con i dati ottenuti sono stati redatti degli atlanti, che l'ente spaziale assicura essere molto accurati e dettagliati, simili a un atlante terrestre. In particolare i rilevamenti altimetrici hanno permesso di calcolare per ciascun pianeta il numero di cime montuose (M), di passi di montagna (P) e di conche (C). I risultati sono riportati nella seguente tabella:

	M	P	C
Pianeta Gobol	2	2	2
Pianeta Roto	3	5	2
Pianeta Astron	1	1	1
Pianeta Hob	5	7	5

Gli esploratori hanno spiegato che hanno considerato essere una cima montuosa (risp. una conca) qualsiasi punto della superficie del pianeta che sia più alto (risp. più basso) dei punti nelle sue immediate vicinanze. È stato invece considerato essere un passo di montagna un punto che lungo un asse è più in alto dei punti vicino e lungo un altro è più in basso. Le foto effettuate hanno mostrato che i passi di montagna, le cime montuose e le conche osservati hanno essenzialmente la stessa forma del passo di montagna, della cima montuosa e della conca riportati in figura.

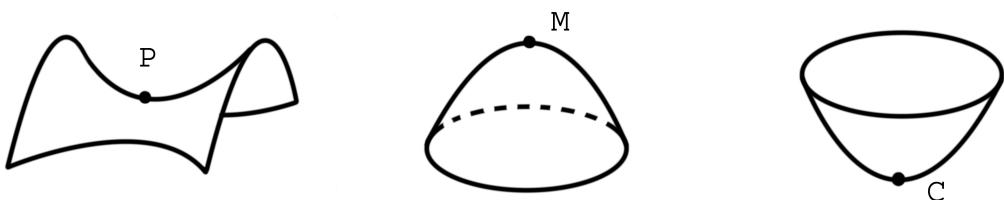


Figura 1. Passo di montagna, cima montuosa e conca.

Gli astronauti hanno inoltre spiegato che in questi pianeti non sono stati osservati né laghi, né mari, né pianure e che gli unici punti che sono risultati essere in piano sono le cime montuose, i passi di montagna e le conche. Un punto, hanno spiegato, è stato considerato in piano quando una piccola goccia di mercurio posta sopra di esso rimaneva completamente immobile.

I nomi dei pianeti sono stati scelti dal grande matematico Piero De Legno che ha espresso perplessità e curiosità per i dati rilevati su Astron e un totale scetticismo per quelli di Hob. In effetti i dati rilevati implicano qualcosa di molto strano sulla geometria di questi due pianeti.

La caratteristica di Eulero. Se S è un poliedro con V vertici, L lati e F facce, la caratteristica di Eulero di S è definita come $c(S) = V - L + F$. Il fatto che i lati siano segmenti di retta e le facce dei poligoni piatti non è essenziale e possiamo definire la caratteristica di Eulero utilizzando la stessa formula per ogni oggetto geometrico che si possa scomporre in V vertici, L "lati" e F "facce". In tal caso diciamo che l'oggetto geometrico è un complesso. Per definire in modo corretto la caratteristica di Eulero le scomposizioni di un complesso devono rispettare alcune proprietà che illustriamo attraverso le figure qui sotto.

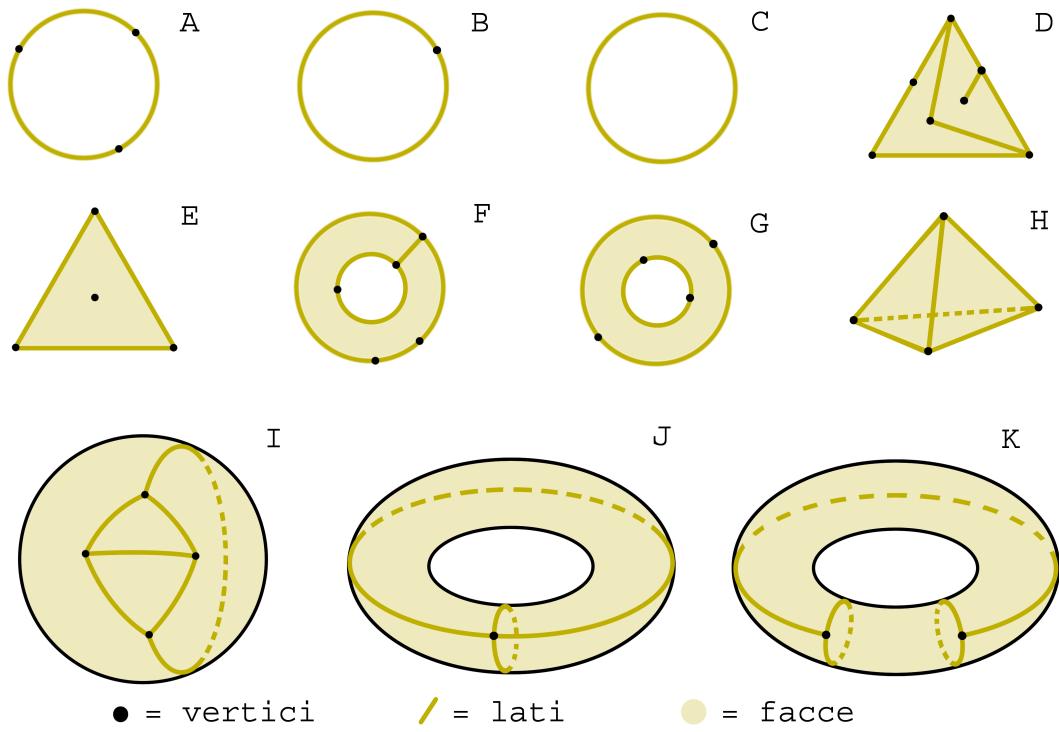


Figura 2. Complessi e loro scomposizioni:

- A: una circonferenza e una sua scomposizione;
- B: un'altra scomposizione della circonferenza;
- C: una scomposizione non ammessa della circonferenza: la circonferenza non è un segmento di curva. Ogni lato è un segmento con un punto iniziale e uno finale che coincidono con due vertici;
- D: una scomposizione del triangolo;
- E: una scomposizione non ammessa del triangolo: il vertice al centro buca la faccia. Ogni faccia deve essere collegata al resto del complesso solo per il suo perimetro;
- F: un anello circolare e una sua scomposizione;
- G: una scomposizione non ammessa dell'anello circolare: la faccia che ricopre l'anello è bucata. Una faccia deve essere come un cerchio elastico e deformabile attaccato al resto del complesso lungo la sua circonferenza;
- H: un tetraedro con la sua scomposizione usuale;
- I: una scomposizione di una sfera ispirata da quella del tetraedro;
- J: un toro (ovvero la superficie di una ciambella) e una sua scomposizione;
- K: una scomposizione non ammessa del toro (vedi il commento alla figura G).

Una proprietà fondamentale della caratteristica di Eulero è di non dipendere dalla particolare scomposizione che abbiamo scelto per calcolarla. Se S è un complesso possiamo quindi indicare

con $c(S)$ la caratteristica di Eulero calcolata utilizzando una qualsiasi scomposizione a nostra scelta di S .

Possiamo riformulare questa proprietà in modo apparentemente più generale dicendo che la caratteristica di Eulero di due complessi che si possono trasformare l'uno nell'altro in modo continuo (ovvero senza strappi, per esempio la superficie di un cubo e quella di una sfera) è la stessa.

Un'altra semplice proprietà della caratteristica di Eulero è la seguente. Supponiamo che un complesso S sia l'unione di due parti A e B tali che A , B e $A \cap B$ siano complessi allora $c(S) = c(A) + c(B) - c(A \cap B)$.

Sia C una curva possibilmente costituita di più di un pezzo e sia $Cil(C)$ il “cilindro” alto h costruito sopra di esso come in figura. Un altro modo per descrivere il cilindro è come l'insieme delle coppie (P, a) con P un punto della curva e a un numero compreso tra 0 e h . P infatti indica il punto della curva sopra il quale si trova il punto del cilindro e a la sua altezza. Non è difficile verificare che in questo caso abbiamo $c(C) = c(Cil(C))$.

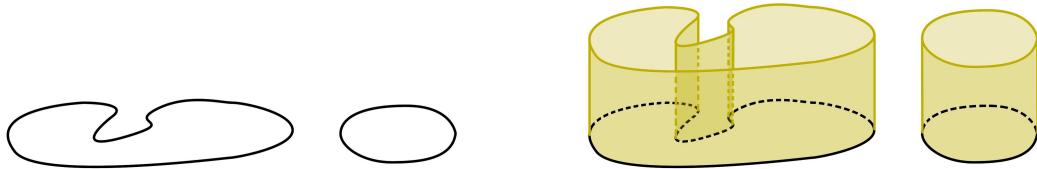
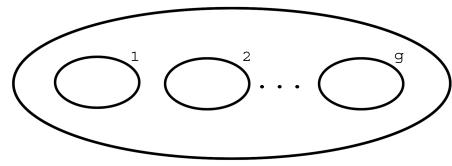


Figura 3. Una curva e il cilindro costruito sopra di essa.

Le scomposizioni illustrate in figura 2 mostrano che la caratteristica di Eulero della superficie di una sfera è uguale a 2 mentre la caratteristica di Eulero di un toro (la superficie della ciambella) è uguale a 0. In particolare ci aspetteremmo che un pianeta sia grosso modo una sfera e quindi che la caratteristica di Eulero della sua superficie sia uguale a 2. Il grande Piero De Legno non è completamente d'accordo sul fatto che la superficie di un pianeta sia veramente simile a quella di una sfera ma si è detto quasi sicuro che la caratteristica di Eulero della sua superficie sia un numero pari minore o uguale a due e ha suggerito di svolgere il seguente esercizio.

Esercizio. Calcolare la caratteristica di Eulero dell'oggetto, detto toro con g buchi, mostrato in figura.



Acqua sulla superficie dei pianeti. Anche se non ci sono né laghi né mari sui pianeti è stata trovata una sostanza in apparenza simile all'acqua, che sotto la forza di gravità si muove lungo la superficie del pianeta. Questo moto ci suggerisce come trasformare un pezzo di superficie in un'altra in modo continuo. Analiziamone i dettagli.

Indichiamo con S la superficie di un pianeta e con S_a l'insieme dei punti della superficie del pianeta che hanno altezza minore o uguale ad a . Supponiamo che i punti in piano siano P_1, \dots, P_n e (per semplicità) che le loro altezze $a_1 < a_2 \dots < a_n$ siano tutte distinte. Vogliamo ora confrontare la caratteristica di Eulero di S_a e S_b con $a < b$. Dividiamo l'analisi in quattro casi:

I caso: $a_i < a < b < a_{i+1}$. Sia T l'insieme dei punti di altezza compresa tra a e b e sia C il bordo superiore di S_a ovvero l'insieme dei punti di altezza a . Consideriamo l'acqua che scorre

sulla striscia T ¹. Se P è un punto della striscia l'acqua che passa per P dopo un po' si troverà su un punto ad altezza a che indichiamo con $a(P)$. Possiamo quindi associare ad ogni punto P di T il punto $a(P)$ e l'altezza di P . Viceversa ognuna di queste coppie determina un punto di T . Quindi abbiamo descritto T come il cilindro sopra C di altezza $b - a$. Osservando che $T \cap S_a = C$ abbiamo quindi $c(S_b) = c(S_a \cup T) = c(S_a) + c(T) - c(C) = c(S_a)$.

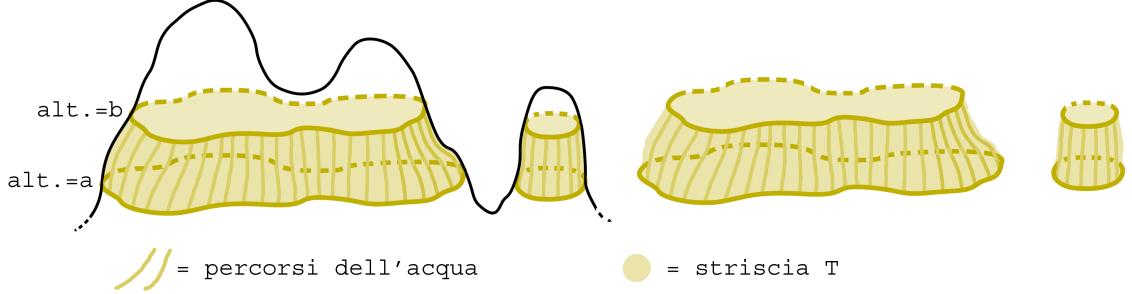


Figura 5. La striscia T è un cilindro di altezza $b - a$ sopra la curva dei punti di altezza a .

II caso: P_i è una cima montuosa e $a = a_i - 1 \text{ cm}$, $b = a_i + 1 \text{ cm}$. Lontano dalla cima montuosa non succede nulla di diverso da quanto descritto sopra. L'acqua nel punto P_i però rimane ferma e quindi non possiamo ragionare come nel caso precedente. Ma se a e b sono molto vicini ad a_i , come nel nostro caso (1 cm lo riteniamo una misura piccola per l'orografia di questi pianeti) la situazione vicino alla montagna si può capire facilmente e osserviamo che S_b è ottenuto da S_a aggiungendo un cerchietto (la cima del monte) come in figura. Quindi abbiamo che $c(S_b) = c(S_a) + 1$.

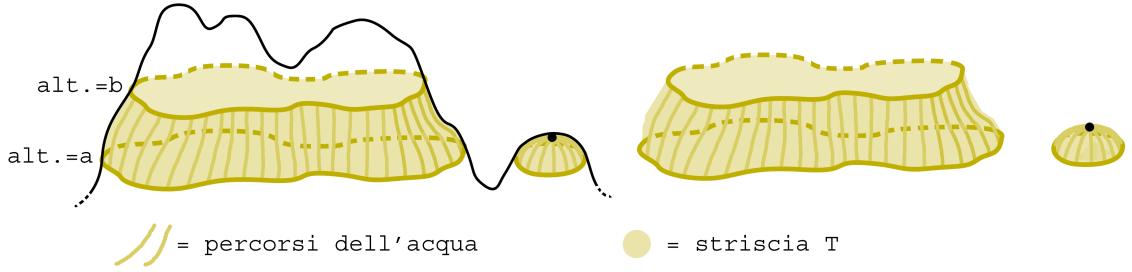


Figura 6. La comparsa di una cima montuosa.

III caso: P_i è un passo di montagna e $a = a_i - 1 \text{ cm}$, $b = a_i + 1 \text{ cm}$. Il caso del passo di montagna è simile al precedente infatti anche in questo caso l'acqua nel punto P_i rimane ferma. Inoltre non sempre l'acqua che passa per un punto arriva prima o poi ad altezza a . Un po' (anche se pochissima) si avvicina invece al punto P_i (la figura sotto mostra il movimento dell'acqua vicino ad un passo di montagna visto dall'alto). Come nel caso precedente bisogna quindi capire cosa succede vicino al passo di montagna. Fissiamo quindi A, B, C, D come in figura ad altezza a e vicino al passo di montagna. Con le linee gialle abbiamo tracciato il percorso dell'acqua che finisce in questi punti. Queste linee dividono la striscia T nella parte T_2 interna a queste linee e nella parte T_1 esterna a queste linee. Per quanto analizzato nel *I* caso sappiamo che aggiungere T_1 a S_a non cambia la caratteristica di Eulero. Abbiamo quindi $c(S_b) = c(S_a \cup T_1) + c(T_2) - c(T_2 \cap (S_a \cup T_1)) = c(S_a) + c(T_2) - c(T_2 \cap (S_a \cup T_1))$ e ora, come si vede in figura 7, osserviamo che T_2 è l'“ottagono” $ABEFCGDGH$ e $T_2 \cap (S_a \cup T_1)$ è l'unione delle

¹È opportuno precisare che l'acqua di questi pianeti è molto speciale. Infatti è un'acqua senza volume, non si accumula mai formando fiumi o pozzi, ma rimane sempre un velo sottilissimo distribuito sopra la superficie dalla quale non si stacca mai. Inoltre a causa dell'attrito la pendenza non determina l'accelerazione dell'acqua ma la sua velocità.

triple di lati opposti $HABE$ e $FCDG$. Possiamo quindi calcolare facilmente la caratteristica di Eulero di questi ultimi pezzi e otteniamo $c(S_b) = c(S_a) - 1$.

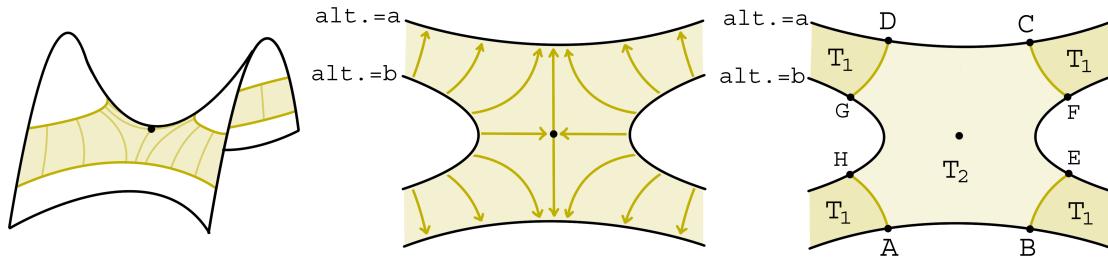


Figura 7. La comparsa di un passo di montagna.

IV caso: P_i è una conca e $a = a_i - 1 \text{ cm}$, $b = a_i + 1 \text{ cm}$. Ragionando in modo simile ai casi precedenti mostrare che $c(S_b) = c(S_a) + 1$.

Combinando i risultati dei quattro passi illustrati e osservando che S_a è vuoto per $a < a_1$ e che $S_b = S$ per $b \geq a_n$ vediamo che possiamo esprimere la caratteristica di Eulero della superficie S di un pianeta mediante la formula $M - P + C$.

In particolare per la caratteristica di Eulero dei quattro pianeti otteniamo i seguenti valori: 2 per Gobol, 0 per Roto, 1 per Astron e 3 per Hob. Di questi solo Gobol risulta avere caratteristica di Eulero pari a quella di una sfera come ci aspettavamo.

Il pianeta Roto, il pianeta Astron e il pianeta Hob. Come spiegare allora i dati per i pianeti Roto, Astron e Hob e come mai Piero De Legno si dice perplesso per i dati di Astron e non per quelli rilevati su Roto e ritiene impossibili quelli di Hob? Il pianeta Roto risulta avere la stessa caratteristica di Eulero di un toro. Un pianeta a forma di ciambella per quanto possa sembrare strano non risulta del tutto inimmaginabile. Inoltre la superficie di un pianeta a prima vista sferico come la Terra in cui sono presenti g gallerie (o g punti) è un toro con g buchi. In effetti una delle foto effettuate su Roto mostra un grosso ponte di roccia.

I casi di Astron e Hob sono invece più complicati. Il risultato dell'esercizio sul toro con g buchi mostra che la caratteristica di Eulero in questi casi è sempre un numero pari e minore o uguale a 2. Ci chiediamo quindi se esistono delle altre superfici la cui caratteristica possa essere uguale a 1 (per Astron) o a 3 (per Hob). In effetti un cerchio ha caratteristica di Eulero uguale a 1 e due tetraedri attaccati per un punto hanno caratteristica di Eulero uguale a 3. Eppure questi due oggetti non ci soddisfano come possibili superfici di un pianeta.

Precisiamo quindi quali siano le proprietà che ci aspettiamo valere per la superficie di un pianeta. Innanzitutto vogliamo che la superficie sia limitata (un piano infinito, per esempio, non va bene). Inoltre la superficie di un pianeta è qualcosa che si può descrivere per mezzo di un atlante. Più precisamente se P è un punto sulla superficie di un pianeta e ci limitiamo a guardare il pianeta vicino al punto P questo sembra essere un pezzetto di piano con P al centro. Per esempio nella nostra vita quotidiana siamo abituati a pensare il nostro pianeta, la Terra, in questo modo ed è anche il modo in cui lo rappresentiamo negli atlanti geografici. Un oggetto che abbia queste proprietà lo chiamiamo superficie. In effetti dei pianeti in questione sono stati redatti atlanti che mostrano che queste ipotesi sono verificate. La figura costituita da due tetraedri attaccati per un vertice invece non è una superficie, il vertice comune infatti non ha le proprietà richieste.

La domanda che ci poniamo è quindi se esistono superfici che hanno caratteristica di Eulero uguale a 1 o a 3.

In effetti, anche se un po' strana, una superficie di caratteristica di Eulero uguale a 1 esiste e si chiama piano proiettivo.

Prendiamo mezza circonferenza e sia P il centro della sua circonferenza. La mezza circonferenza non è una superficie perché P non ha un intorno che è fatto come un pezzetto di piano con P al centro. Se incolliamo però due semicirconferenze lungo il diametro si crea una figura che nelle vicinanze di P ha le caratteristiche di una superficie.

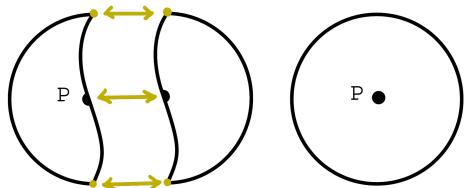


Figura 8. P trova la sua metà mancante (le frecce indicano i punti che vanno incollati insieme).

Incollando due cerchi in questo modo possiamo per esempio costruire la sfera e il toro.

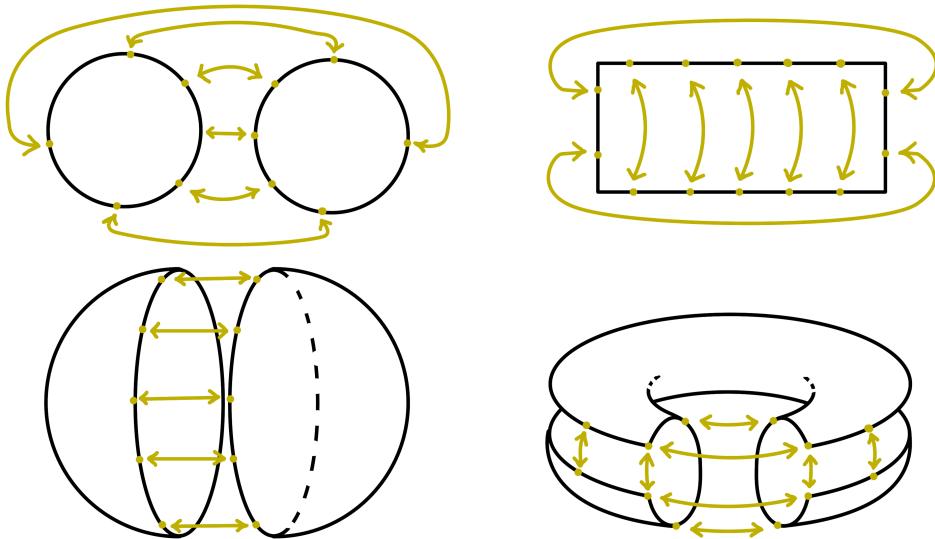


Figura 9. Una sfera ottenuta dall'incollamento di due cerchi e un toro ottenuto dall'incollamento di un rettangolo lungo il perimetro.

Il piano proiettivo si può costruire nello stesso modo: prendiamo un cerchio e incolliamo i punti della circonferenza opposti. La figura che ne risulta è difficile da visualizzare perché il piano proiettivo non si può realizzare come sottoinsieme dello spazio. Una proprietà che è facile verificare è che la superficie del piano proiettivo non ha due lati distinti ma uno solo così come avviene per un nastro di Moëbius. Infatti muovendosi sopra la superficie si può tornare sullo stesso punto ma dalla parte opposta. Possiamo renderci conto di questo ritagliando all'interno del piano proiettivo dei nastri di Moëbius.

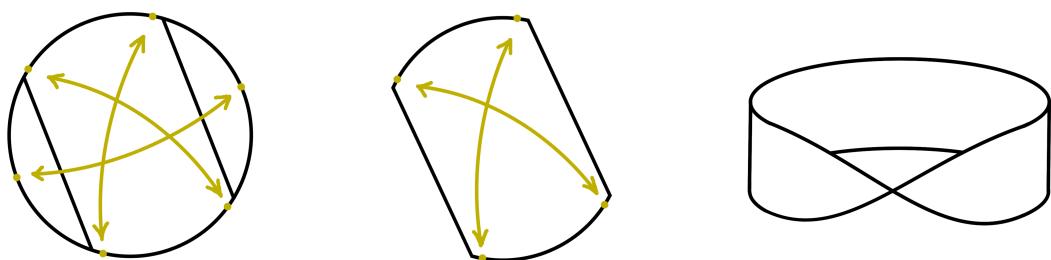


Figura 10. Una striscia del piano proiettivo.

Potrebbe quindi essere che il piano proiettivo sia la superficie di un pianeta? Se l'universo fosse grosso modo come lo spazio euclideo tridimensionale ovviamente non potrebbe essere perché non possiamo realizzare il piano proiettivo come un suo sottoinsieme. Quindi dobbiamo perlomeno ipotizzare che l'universo sia curvo. La situazione però è più complicata di così. La superficie di un pianeta infatti è il bordo di un oggetto tridimensionale (il pianeta appunto) e non tutte le superfici possono essere il bordo di un oggetto tridimensionale. Piero De Legno ci assicura che una superficie può essere il bordo di un pianeta se e solo se la sua caratteristica di Eulero è un numero pari (vedi il capitolo sul cobordismo in [2]). Il piano proiettivo da solo, in particolare, non può costituire il bordo di un pianeta. Potrebbe essere però che il bordo di un pianeta sia costituito da due (o più) pezzi staccati di superficie (un po' come due punti sono il bordo di un segmento, o tre cerchi sono il bordo della superficie in figura) per esempio da due piani proiettivi.

Figura 11. Una superficie che ha come bordo tre cerchi.

Il caso del pianeta Hob ci porta però a pensare che i dati non siano così accurati come l'ente spaziale sostiene.

Oltre al toro con g buchi e al piano proiettivo esistono altre superfici. La costruzione del piano proiettivo si può generalizzare nel seguente modo. Prendiamo una sfera e togliamo ad essa g cerchietti (le circonferenze che delimitano i cerchietti però non le togliamo). Richiudiamo poi la figura rincollando i punti opposti delle circonferenze che delimitano i cerchietti tolti. Un conto del tutto simile a quello per il toro con g buchi mostra che la caratteristica di Eulero di questa figura è uguale a $2 - g$.

Per $g = 1$ si riottiene il piano proiettivo e per $g = 2$ si ottiene una figura detta bottiglia di Klein di cui forse vi è capitato di vedere la seguente rappresentazione grafica.

Figura 12. La generalizzazione del piano proiettivo e la bottiglia di Klein.

Il grande Piero De Legno assicura che è possibile dimostrare che non esistono altre superfici oltre i tori con g buchi e la generalizzazione del piano proiettivo (vedi per esempio [1] o [2]). In particolare la caratteristica di Eulero di una superficie è sempre un numero minore o uguale a 2.

Commenti finali. Le affermazioni degli esploratori spaziali sulla forma dei passi di montagna e sull'assenza di mari e pianure introducono delle ipotesi che sono importanti al fine delle deduzioni che abbiamo fatto. Per esempio un pianeta perfettamente piatto tranne che per due montagne situate ai poli opposti potrebbe darci qualche problema.

Molto importante è anche l'ipotesi della forma dei passi di montagna. Osserviamo infatti che ci possono essere dei punti in piano la cui geometria è strana e che invaliderebbero il nostro ragionamento.

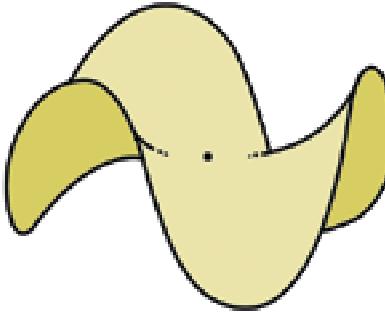


Figura 13. Un triplo passo di montagna.

Per esempio è possibile che la geografia di un pianeta a forma di toro possa presentare solo tre punti in piano: una cima montuosa, una conca e un passo di montagna come il precedente. In tal caso la formula che ci permette di calcolare la caratteristica di Eulero come $M - P + C$ non è più verificata.

Un modo di esplicitare le ipotesi in un linguaggio matematico più standard può essere il seguente: la superficie del pianeta S è una superficie compatta liscia e la funzione altezza $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione regolare (possiamo ipotizzare C^2 cioè derivabile due volte e con derivate continue). La proprietà per un punto P di essere in piano corrisponde all'annullarsi del differenziale di f in P e un modo (in realtà meno generale delle ipotesi che abbiamo fatto) per esprimere le ipotesi sulla forma dei punti in piano e in particolare di quella dei passi di montagna è quella di dire che i punti in piano hanno Hessiano non degenere (o equivalentemente che in coordinate locali la funzione si possa scrivere nella forma $a + x^2 + y^2$ in una conca, $a + x^2 - y^2$ vicino a un passo di montagna e $a - x^2 - y^2$ vicino ad una cima montuosa).

La teoria di Morse ha molte generalizzazioni possibili. Quello che è veramente importante non è tanto la presenza della funzione altezza ma la presenza in ogni punto di una freccia che indica la direzione in cui muoversi (nel nostro caso la direzione di massima pendenza). Alcune delle generalizzazioni in questa e altre direzioni si possono trovare in [2] o in [4] (entrambi i testi sono molto adatti per uno studente ai primi anni di università).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. R. Courant e H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Universale scientifica Boringhieri, vol.65/66/67, Boringhieri, 1971.
2. B. Dubrovin, S. Novikov e A. Fomenko, *Geometria contemporanea, III volume*, Editori Riuniti Edizioni Mir, 1989.
3. J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics studies, study 51, Princeton Univ. Press, third edition, 1969.
4. J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia, 1965 (ristampato in Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton Univ. Press, 1997).
5. I. Stewart, *I nuovi viaggi di Gulliver*, Le Scienze, Agosto 1991.