Università degli Studi di Pisa-Anno Accademico 1993-1994
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea in Matematica

Formula trisecante e equazioni K.P.

Candidato: Andrea Maffei

Relatore: Prof. C. De Concini

Controrelatore: Prof. F. Lazzeri

Indice

Introduzione

Capitolo 1

Il formalismo Grassmanniano

In questo capitolo darò una generalizzazione della definizione di grassmanniana per uno spazio di dimensione finita H. Cercando di sviluppare un parallelismo con il caso di dimensione finita introdurrò anche i fibrati lineari det e det^* e di quest'ultimo studierò le sezioni.

Poiché a differenza del caso di dimensione finita il gruppo $GL(H) = \{automorfismi \quad lineari \quad e \quad continui \quad di \quad H\}$ non agisce sulla grassmanniana, mi servirò allora di un suo sottogruppo G e di una sua estensione centrale $1 \to \mathbb{C}^* \to \hat{G} \to G \to 1$ e vedremo come G agisca sulla grassmanniana e $\hat{G}$ su det^* in modo compatibile. Studierò anche i sottogruppi G_+ e G_- di G che ammettono sezioni su $\hat{G}$.

Introdurrò quindi una decomposizione di H e ad essa associata un sottogruppo $\Gamma_+^{(n)}$ di G_+ e un sottogruppo discreto Λ di G.

Definiremo finalmente la funzione τ e le funzioni τ_λ , per $\lambda \in \Lambda$, definite su G_+ e forniremo una formula per il loro calcolo esplicito.

Se si esclude l'introduzione del gruppo Λ la costruzione della grassmanniana è fatta secondo la traccia data da Segal e Wilson e da Arbarello e De Concini.

Limiterò le dimostrazioni essenzialmente, al paragrafo relativo a Λ e a $\Gamma_+^{(n)}$ e enuncerò i lemmi necessari alla costruzione dela grassmanniana cercando di rendere chiare le definizioni.

1.1 Lo spazio H

Siano:

$$\begin{aligned} H^{(n)} &= H_+^{(n)} + H_-^{(n)} \\ H_+^{(n)} &= \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \; e \; f(0) = 0\}^n \\ H_-^{(n)} &= \mathbb{C}\{z^{-1}\}^n \quad \text{i germi di funzioni olomorfe in } z = \infty \end{aligned}$$

Osservazione 1.1 *$H^{(n)} \simeq H = H^1$ e l'isomorfismo, dato da $(f_1, \ldots, f_n) \to z^{1-n} f_1(z^n) + \cdots + f_n(z^n)$, porta $H_+^{(n)}$ in H_+ e $H_-^{(n)}$ in H_-. Esporrò quindi la teoria per H, osservando come si traformano le formule quando vengono lette in $H^{(n)}$.*

Pongo $v_j = z^j$ e osservo che $H_+ = \overline{< \{v_j \; j > 0\} >}$ e $H_- = \overline{< \{v_j \; j \leq 0\} >}$. Indicherò sempre con z la variabile di $f \in H$.

Definizione 1.1 *Siano:*

$$\begin{aligned} D_\varepsilon &= \{z \in S^2 : |z^{-1}| < \varepsilon\} \\ D_\varepsilon^* &= D_\varepsilon - \{\infty\} \\ H_{-\varepsilon} &= \mathcal{O}(\bar{D}_\varepsilon) = \{f \in \mathcal{O}(D_\varepsilon) \cap C^0(\bar{D}_\varepsilon)\} \\ H_{+\varepsilon} &= \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \bar{D}_\varepsilon) \cap L^2(\partial D_\varepsilon) \; e \; f(0) = 0\} \end{aligned}$$

Su $H_{+\varepsilon}$ metto la topologia L^2 e osservo che per la formula di Cauchy e il teorema di Lebesgue $H_{+\varepsilon}$ è chiuso di L^2 quindi spazio di Hilbert . Allora $H_+ = \lim_{\varepsilon \to 0} H_{+\varepsilon}$ è spazio di Fréchet.

$H_{-\varepsilon}$ è invece spazio di Banach con la norma di L^∞ e su $H_- = \lim_{\varepsilon \to 0} H_{-\varepsilon}$ metto la topologia limite diretto ed è quindi $SVTlc$.

H munito della topologia prodotto risulta essere un $SVTlc$.

Introduco ora le seguenti notazioni:

$$\mathcal{B}_{++} = \mathcal{L}(H_+, H_+) \qquad \mathcal{B}_{+-} = \mathcal{L}(H_-, H_+)$$

$$\mathcal{B}_{-+} = \mathcal{L}(H_+, H_-) \qquad \mathcal{B}_{--} = \mathcal{L}(H_-, H_-)$$

Sia H_{++} l'insieme costituito dai germi delle funzioni f olomorfe nell' intorno di $\mathbb{C} \times \{\infty\}$ e tali che $f(0, w) = 0$.

Siano inoltre:

$$H_{++\varepsilon} = \left\{ f(z,w) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \times D_\varepsilon) \; e \; f \equiv 0 \; in \; \{0\} \times S^2 - \{0\} \right\}$$

$$\begin{aligned} H_{+-} &= \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2) \; e \; f(z,0) = f(0,z) = 0 \forall z \right\} \\ H_{+-\varepsilon} &= \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2 - \overline{D_\varepsilon \times D_\varepsilon}) \cap L^2(\partial(D_\varepsilon \times D_\varepsilon)) \; e \; f(z,0) = f(0,z) = 0 \, \forall z \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{-+} &= \mathbb{C}\{z^{-1}, w^{-1}\} \\ H_{-+\varepsilon} &= \mathcal{O}(D_\varepsilon \times D_\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{--} &= \{\text{germi di olomorfe di } \{\infty\} \times \mathbb{C} \text{ in } S^2 \times \mathbb{C}\} \\ H_{--\varepsilon} &= \mathcal{O}(D_\varepsilon \times \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Osservo che :

1. $H_{\mu\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0} H_{\mu\lambda\varepsilon}$ dove il limite si deve intendere diretto o indiretto a seconda dei casi.

2. $H_{+-\varepsilon}$ è Hilbert e quindi H_{+-} è uno spazio di Frechet.

3. $H_{-+\varepsilon}$ è uno spazio di Banach e munisco H_{-+} della topologia di limite diretto. H_{-+} è quindi un $SVTlc$.

Analogamente si possono introdurre delle topologie su H_{++} e su H_{--}, l'unica topologia che però realmente useremo è quella di H_{-+}.

L'introduzione degli spazi $H_{\mu\lambda}$ è giustificata dalla loro relazione con gli spazi $\mathcal{B}_{\mu\lambda}$. Data $g(z,w) \in H_{\mu\lambda}$ costruiamo un operatore $T_g \in \mathcal{B}_{\mu\lambda}$ nel seguente modo:

$$T_g(f)(z) = Res_{w=\infty} g(z,w) f(w) dw^{-1}$$

Verifichiamo che è una buona definizione nel caso di H_{-+}.

Sia $f \in H_+$ e $g \in H_{-+}$ con $f(z) = \sum_1^\infty a_i z^i$ e $g(z,w) = \sum_{i=0}^\infty h_i(z) w^{-i}$.

Sia ora $U = D_\varepsilon \times D_\varepsilon$ un intorno di (∞, ∞) in cui è definita g e quindi sia $D_\varepsilon \times \partial D_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset U$.

Ora
$$Res_{w=\infty} g(z,w)f(w)dw^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{\frac{\varepsilon}{2}}} g(z,w)f(w)dw^{-1}$$
e quindi
$$T_g(f) \in \Gamma(D_\varepsilon, \mathcal{O}) \Rightarrow T_g(f) \in \mathbb{C}\{z^{-1}\}$$
inoltre osserviamo che
$$g(z,w)f(w) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_j h_i(z) w^{j-i}$$
e quindi
$$Res_{w=\infty} g(z,w)f(w)dw^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j h_{j-1}(z)$$

Si può dimostrare che l'applicazione di $H_{\mu\lambda}$ in $\mathcal{B}_{\mu\lambda}$ che manda g in T_g è un isomorfismo di spazi vettoriali. Indicherò, per $T \in \mathcal{B}_{\mu\lambda}$, con K_T il corrispettivo elemento di $H_{\mu\lambda}$.

Il seguente lemma sullo spazio $H_{\mu\lambda}$ e $\mathcal{B}_{\mu\lambda}$ sarà molto utile

Lemma 1.1

1. *$\mathbb{C}[z^{-1}, w^{-1}]$ è denso in H_{-+}.*
2. *Se $u \in H_{-+}$, $v \in H_{+-}$ e $f \in H_{++}$ è Fredholm allora $F + vu$ è Fredholm e indice($F + vu$)= indice(F)*

La scelta di H fatta permette di dare una definizione di traccia e di determinante per particolari ideali di $\mathcal{B}_{++}$ e $\mathcal{B}_{--}$.

Definizione 1.2 *Siano $u \in \mathcal{B}_{+-}$ e $v \in \mathcal{B}_{-+}$. Definisco:*
$$tr(uv) = tr(vu) = Res_{\substack{z=\infty \\ w=\infty}} K_u(z,w)K_v(z,w)dz^{-1}dw^{-1}$$
definisco inoltre
$$\mathcal{T}_+ = \{t \in \mathcal{B}_{++} \text{ e } t = uv \text{ con } u \in \mathcal{B}_{+-} \text{ e } v \in \mathcal{B}_{-+}\}$$

$$\mathcal{T}_- = \{t \in \mathcal{B}_{--} \; e \; t = vu \; con \; u \in \mathcal{B}_{+-} \; e \; v \in \mathcal{B}_{-+}\}$$

$$A_+ = \{1 + t \; : \; t \in \mathcal{T}_+\} \qquad A_- = \{1 + t \; : \; t \in \mathcal{T}_-\}$$

$$\mathcal{A} = \{w : H_+ \mapsto H \; : \; \pi_+ \circ w : H_+ \mapsto H_+ \in A_+ e \; w \; \text{è un isomorfismo con la sua immagine}\}$$

La dimostrazione della seguente fondamentale proposizione si può trovare in Arbarello-De Concini

Proposizione 1.1 *Sia* $a \in A_+$ *e* $t = a - 1$*; allora*

1. $\forall i \geq 1$ *è definito* $Tr(\bigwedge^i t)$ *dove* $\bigwedge^i t \; : \; \bigwedge^i H_+ \mapsto \bigwedge^i H_+$
2. $Det\, a = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} Tr(\bigwedge^i a)$ *converge*
3. $Det\, a \neq 0 <=> a$ *invertibile*
4. *Per* $g \in \mathcal{B}_{++}$ *e* g *invertibile* $Tr(gtg^{-1}) = Tr\, t$ *e* $Det(tat^{-1}) = Det\, a$
5. *Det coincide coincide con il determinante usuale nel caso in cui* t *è a rango finito*

Dato un elemento $b \in \mathcal{B}_{++}$ introduco l'insieme

$$\Sigma_b = \{y \in \mathcal{B}_{++} \; invertibile \; e \; by^{-1} \in A_+\}$$

e osservo che $\Sigma_a \Sigma_b = \Sigma_{ab}$ e che $\Sigma_1 = \{y \in A_+ \; : \; y \; invertibile\}$. Inoltre se $q \in \Sigma_b$ allora $q\Sigma_1 = \Sigma_b$ e se b è Fredholm allora $\Sigma_b \neq \emptyset$.

Per sviluppare la teoria è fondamentale la seguente definizione che giustifica la scelta del nostro H. La diamo nel caso di $H^{(n)}$.

Definizione 1.3 *Dati* $f, g \in H^{(n)}$ *è ben definita (e si può vedere come nel caso della costruzione di* T_g*) la forma bilineare*

$$(f; g) = Res_{z=\infty}(f(z)|g(z))dz^{-1} = Res_{z=\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(z) g_i(z) dz^{-1}$$

dove $f = (f_1, \ldots, f_n)$*,* $g = (g_1, \ldots, g_n)$*. Se* $V \subset H$ *indicherò sempre con* $V^{\perp}$ *l'ortogonale rispetto a questa forma bilineare.*

Lemma 1.2

1. *$H_+^{(n)}$ e $H_-^{(n)}$ sono sottospazi totalmente isotropi*

2. *(;) fornisce una dualità perfetta fra $H_+^{(n)}$ e $H_-^{(n)}$.*

Osservazione 1.2 *La forma (;) dipende da n; non è cioè la rilettura della forma definita in $H^{(1)}$ mediante l'isomorfismo definito nell'osservazione 1.*

1.2 La Grassmanniana

Diamo finalmente la definizione della Grassmanniana

$Gr = \{W\ :\ W$ è un sottospazio chiuso di H e $\pi_+|_W$ è Fredholm di indice $0\}$

dove $\pi_+\ H \mapsto H_+$ è la proiezione di nucleo H_-. Iniziamo lo studio della Grassmanniana costruendo alcuni particolari elementi di Gr. Sia

$$\mathcal{I}_0 = \{I \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\ :\ I = (i_1, i_2, \ldots)\, e\, i_1 < i_2 < \ldots\ e\, i_l = l\ definitivamente\}$$

e per $I \in \mathcal{I}_0$ sia $H_I = \overline{<\{e_j\ :\ j \in I\}>}$ e $H_{I-} = \overline{<\{e_j\ :\ j \notin I\}>}$. È facile verificare che $H_I \in Gr$, che $H_I \simeq H_+$, $H_{I-} \simeq H_-$ e che $H = H_I \bigoplus H_{I-}$.

Dato $A \in \mathcal{L}(H_I, H_{I-})$ osserviamo che $Grafico\, A = W \in Gr$.

Introduco quindi i seguenti sottoinsiemi di Gr:

$$\mathcal{W}_I = \{W : \text{W è il grafico di } A \text{ con } A \in \mathcal{L}(H_I, H_{I-})\}$$

Si può osservare che :

1. $\mathcal{W}_I = \{W : \pi_I : W \mapsto H_I$ è un isomorfismo$\}$ dove $\pi_I\ :\ H \mapsto H_I$ è la proiezione di nucleo H_I.

2. $\mathcal{W}_I \subset Gr\ \forall I \in \mathcal{I}_0$ e che $Gr = \bigcup_{I \in \mathcal{I}_0} \mathcal{W}_I$

3. $\mathcal{W}_I \simeq \mathcal{L}(H_I, H_{I-}) \simeq \mathcal{B}_{-+}$.

Possiamo quindi munire $\mathcal{W}_I$ della topologia di H_{-+}.

Prima di esplicitare la mappa, introduco alcune notazioni che saranno utili anche in seguito .

Definizione 1.4 *Sia $W \in Gr$. Sia*

$$\mathcal{A}(W) = \{w \; : \; H_+ \mapsto W \; w \; iso. \; di \; sp. \; vett. \; top. \, e \, w_+ = \pi_+ \circ w \in A_+\}$$

$$W^{alg} = \{f \in W \; tc \; \pi_+(f) \in \mathbb{C}[z]\}$$

I seguenti lemmi sono di facile dimostrazione:

Lemma 1.3 *Sia $W \in Gr$; allora $\overline{W^{alg}} = W$.*

Lemma 1.4 *Sia $W \in Gr$; allora $\exists\, w \; : \; H_+ \mapsto H$ tale che $W = w(H_+)$ e $\pi_+ \circ w = w_+ = 1 = r$ con $r \; : \; H_+ \mapsto H_+$ a rango finito e quindi $A(W) \neq \emptyset$.*

Un elemento di $\mathcal{A}(W)$ si dice base ammissibile di W; infatti dato un $w \in \mathcal{A}(W)$ e posto $w_i = w(e_i)$ per $i \geq 1$ si ha che $\overline{< \{w_i\} >} = W$. L'insieme $\mathcal{A}$ introdotto nel paragrafo precedente si dirà quindi l'insieme delle basi ammissibili.

Descrivo ora le mappe tra $\mathcal{W}_I$ e $\mathcal{B}_{-+}$. Dato $W \in Gr$ e $w \in A(W)$ osservo che $W \in \mathcal{W}_I$ se e solo se $\pi_I \circ w \; : \; H_+ \mapsto H_I$ è invertibile e che dato $W \in \mathcal{W}_I$ $A^I_W = \pi_{I-} \circ w \circ (\pi_I \circ w)^{-1} \; : \; H_I \mapsto H_{I-}$ è indipendente dalla scelta di w ed è l'unica aplicazione tale che $Grafico \, A^I_W = W$.

Scelgo l'isomorfismo tra H_+ e H_I nel seguente modo: mando e_l in e_{i_l} e analogamente per H_{I-} e H_- e ottengo quindi un isomorfismo tra $\mathcal{L}(H_I, H_{I-})$ e $\mathcal{B}_{-+}$. Indico con Φ_I la mappa da $\mathcal{W}_I$ a $\mathcal{B}_{-+}$ che associa a W l'immagine di A^I_W mediante questo isomorfismo.

Gr risulta essere una varietà olomorfa modellata su H_{-+}.

Malgrado Gr non sia ovviamente compatta si può dimostrare che le uniche sezioni di Gr sono le costanti.

Proposizione 1.2

$$\Gamma(Gr \, ; \, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$$

Dimostrazione: Dò la dimostrazione soprattutto per mostrare una importante costruzione che useremo anche in seguito. Per $n \geq 1$ sia

$$X_n = \{W \in Gr \; : \; z^n H_+ \subset W \subset z^{-n} H_+\}$$

. Osserviamo che $X_n \subset X_{n+1}$ e che $X_n \simeq Gr(2n; \frac{z^{-n}H_+}{z^n H_+})$ e l'isomorfismo è dato da $W \mapsto \frac{W}{z^n H_+}$ e quindi X_n è varietà olomorfa di dimensione finita.

Per dimostrare il lemma basta quindi dimostrare che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ è un denso di Gr. A questo fine basta dimostrare che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \cap \mathcal{W}_I$ è denso in $\mathcal{W}_I$ per ogni $I \in \mathcal{I}_0$. Darò la traccia della verifica solo nel caso $I = \mathbb{N}$.

In realtà tale verifica è sufficiente perché come sarà evidente i $\mathcal{W}_I$ sono aperti densi di Gr.

Abbiamo che $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\mathbb{N}}$ è isomorfo a $\mathcal{B}_{-+}$ e sia $\Phi : \mathcal{W} \mapsto \mathcal{B}_{-+}$ l'isomorfismo.

Devo quindi dimostrare che, se pongo $\mathcal{B}_n = \Phi(\mathcal{W} \cap X_n)$, ho che $\bigcup_n \mathcal{B}_n$ è denso in $\mathcal{B}_{-+}$.

Sia $T : H_+ \mapsto H_-$ e $T = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} e_{-ij}$ dove $e_{ij}(v_h) = \delta_{jh} v_i$.

Vale

$$Grafico\, T \subset z^{-n} H_+ \;\; <=> \;\; a_{ij} = 0 \, per \; i \geq n$$

$$Grafico\, T \supset z^{n} H_+ \;\; <=> \;\; a_{ij} = 0 \, per \; j > n$$

quindi

$$T \in \mathcal{B}_n \;\; <=> T = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{-ij}.$$

Sia quindi $h_j(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i\,j+1} z^{-i}$ per $j = 0, \ldots, n-1$; si ha che $K_T(z, w) = \sum_{j=0}^{n-1} h_j(z) w^{-j}$. Quindi

$$T \in \mathcal{B}_n \;\; <=> \;\; K_T(z^{-1}, w^{-1}) \in \mathbb{C}[z, w] \text{ e il grado di } K_T \text{ in } z \text{ e in } w \text{ è } \leq n-1$$

Rimane da dimostrare che i polinomi in z^{-1}, w^{-1} sono densi in $\mathbb{C}\{z^{-1}, w^{-1}\}$; questo è assicurato dal lemma 1. ■

Vediamo infine come si comporta Gr rispetto all'applicazione che manda W in $W^{\perp}$.

Proposizione 1.3

1. *$W \in Gr \;\; => \;\; W^{\perp} \in Gr$*
2. *Se*

$$0 \to K_W \to W \stackrel{\pi_+}{\to} H_+^{(n)} \to C_W \to 0$$

e

$$0 \to K_{W^{\perp}} \to W^{\perp} \to H_+^{(n)} \to C_{W^{\perp}} \to 0$$

allora $K_{W^{\perp}} \simeq C_W^*$ e $C_{W^{\perp}} \simeq K_W^*$, dove la dualità è data da $(\, ; \,)$.

Dimostrazione:
1^a osservazione.

Se $T\ :\ V_1 \mapsto V_2$ è Fredholm allora $T^*\ :\ V_2^* \mapsto V_1^*$ è Fredholm e $indice\, T = -\, indice\, T^*$. Inoltre vale $(Ker\, T)^\circ = Im\, T^*$, $Ker\, T^* = (Im\, T)^\circ$, $(KerT)^* \simeq coKer\, T^*$ e $Ker\, T^* \simeq (coKer\, T)^*$.

Infatti sia $V_1 = K \bigoplus X$, $V_2 = Y \bigoplus C$ con $Y = Im\, T$, $K = Ker\, T$; sia inoltre $S = T|_X\ :\ X \mapsto Y$ un isomorfismo; sia $p\ :\ V_1 \mapsto X$ e $i\ :\ Y \mapsto V_2$. Si ha $T = i \circ S \circ p$, $T^* = p^* \circ S^* \circ i^*$.

Ora l'osservazione è vera per i^*. Innanzitutto notiamo che i^* è surgettiva. Infatti se $y^* \in Y^*$ possiamo definire $v_2^* \in V_2^*$ ponendo $v_2^* = 0$ su C e $v_2^* = y^*$ su Y: vale allora $i^*(v_2^*) = y^*$.

D'altra parte, come si verifica immediatamente, $Ker\, i^* = Y^\circ =$
$= \{v_2^* \in V_2^*\ :\ v_2^*(Y) = 0\}$ e $Y^\circ \simeq C^*$.

Inoltre, l'osservazione è vera per p^* data l'iniettività di p^* e la ovvia relazione $Im\, p^* = (Ker\, p)^\circ$ da cui ricaviamo $Ker\, p = (Im\, p^*)^\circ$ e $(Ker\, p)^* \simeq coKer\, p^*$. Infine l'osservazione è vera anche per S^* perchè è un isomorfismo e dunque è vera per T.

2^a osservazione.

$$\left(\frac{H^{(n)}}{W}\right)^* \simeq W^\perp$$

Definisco la seguente applicazione Φ da $W^\perp$ a $\left(\frac{H^{(n)}}{W}\right)^*$: se $\pi\ :\ H^{(n)} \mapsto \frac{H^n}{W}$ è la proiezione, poniamo $< \Phi(w)\, ;\, \pi(u) >=< w\, ;\, u >$. Si ha banalmente che Φ è ben definita e iniettiva.

Φ è anche surgettiva; infatti se $\gamma \in \left(\frac{H^{(n)}}{W}\right)^*$, possiamo scegliere $u_0 \in H^{(n)}$ tale che $(u_0\, ;\, u) = \gamma(\pi(u))$ per ogni $u \in H^{(n)}$. vale $u_0 \in W^\perp$ e $\Phi(u_0) = \gamma$.

Sia ora

$$\varphi\ :\ H_-^{(n)} \times W \mapsto H^{(n)}$$

$$\varphi(u, w) = u + w$$

e sia

$$\tilde\varphi = \pi \circ \varphi\ :\ H_-^n \mapsto \frac{H^{(n)}}{W}$$

Notiamo che φ e $\tilde\varphi$ sono operatori di Fredholm e che $Ker\, \tilde\varphi = K_W$ e $coKer\, \tilde\varphi = C_W$.

Ora usando l'osservazione 2 e la relazione $(H_-^{(n)})^* = H_+^{(n)}$ troviamo che $\tilde{\varphi}^* : W^\perp \mapsto H_+^{(n)}$ è di Fredholm.

Basta quindi osservare che $\tilde{\varphi}^* = \pi_+$; ciò segue direttamente per costruzione e per il fatto che $H_-^{(n)}$ è totalmente isotropo.

■

Definizione 1.5 *Posso quindi definire l'applicazione* $\mu : Gr \mapsto Gr$ *tale che* $\mu(W) = W^\perp$

Osservo infine che per $w : H_+ \mapsto H$ tale che $w : H_+ \mapsto w(H_+)$ è un isomorfismo e $w_+ = \pi_+ \circ w$ è Fredholm di indice 0 si ha che $w(H_+) \in Gr$.

In particolare, per $w \in \mathcal{A}$ = l'insieme delle basi ammissibili ha che $w(H_+) = W \in Gr$ e $w \in \mathcal{A}(W)$. Poiché per $w, \tilde{w} \in \mathcal{A}$ vale

$$w(H_+) = \tilde{w}(H_+) <=> \tilde{w} = wa \text{ con } a \in \mathcal{A}_+ = \mathcal{A}(H_+)$$

abbiamo

$$Gr \simeq \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_+}$$

dove $\mathcal{A}_+$ agisce su $\mathcal{A}$ a destra per composizione.

1.3 I fibrati lineari *det* e *det**

L'ultima caratterizzazione data di Gr permette di definire facilmente il fibrato det ed il suo duale det^*.

Definizione 1.6

$$det \;=\; \frac{\mathcal{A} \times \mathbb{C}}{\sim}$$

dove $\sim$ *è la seguente relazione di equivalenza in* $A \times \mathbb{C}$*:*
per $u \in \mathcal{A}$ *e* $t \in \mathcal{A}_+$ $(ut; \delta) \;\sim\; (u; \delta\, Det\, t)$*. Risulterà quindi essere*

$$det^* \;=\; \frac{\mathcal{A} \times \mathbb{C}}{\sim'},$$

$(ut; \delta) \;\sim'\; (u; \delta Det\, t^{-1})$ *per* $u \in \mathcal{A}$ *e* $t \in \mathcal{A}_+$.

Osservo che *det* non ammette sezioni. Infatti osserviamo che $det|_{X_n}$, dove X_n sono gli spazi introdotti nella dimostrazione della Proposizione 2, è isomorfo all'usuale fibrato lineare *det* definito sulla grassmanniana di dimensione finita, il quale non ammette sezioni.
Sarà invece essenziale per lo svilupo della teoria l'esistenza di sezioni per il fibrato det^*. Osservo quindi che posto $J_I : H_+ \rightarrow H_I$ l'isomorfismo che manda e_l in e_{i_l} e preso $u \in \mathcal{A}$ abbiamo che $w_I = J_I^{-1} \circ \pi_I \circ u \in \mathcal{A}_+$. Posso quindi dare la seguente

Definizione 1.7 *Sia* $I \in \mathcal{I}_0$, $\sigma_I : W \rightarrow det^*$ *è così definita*

$$\sigma_I(u) = (w; det\, w_I)$$

Pongo inoltre $\sigma = \sigma_{\mathbb{N}}$.

La definizione è ben data, infatti $\sigma_I(wt) = (wt; detw_I t) \sim (w; detw_I)$ per $t \in \mathcal{A}_+$. Osserviamo che $w \in \mathcal{W}_I \Leftrightarrow \sigma_I(w) \neq 0$.

Vediamo ora come si comporta la dualità rispetto al line bundle det^*. Seguendo Arbarello e De Concini enunciamo il seguente

Lemma 1.5 *Sia* $0 \rightarrow K_W \rightarrow W \xrightarrow{\pi_+} H_+ \rightarrow C_W \rightarrow 0$.
Allora $det_W^* \cong Hom\left(\bigwedge^{max} K_W; \bigwedge^{max} C_W\right) \cong \bigwedge^{max} K_W^* \otimes \bigwedge^{max} C_W *$

Dato $W = K_W \oplus W'$ *e* $H_+ = \pi_+(W) \oplus C_W$ *e* $\varphi_0 : K_W \rightarrow C_W$ *iso e* $P : W \rightarrow W'$ *e* $Q : W \rightarrow K_W$ *l'isomorfismo è dato assegnando l'azione di* $m = \mu \bigwedge^{max} \varphi_0 \in Hom\left(\bigwedge^{max} K_W; \bigwedge^{max} C_W\right)$ *su det nel seguente modo*
$< (w; \lambda); m > = \lambda \mu det\left((\pi_+ \circ P + \varphi_0 \circ Q) \circ w\right)$
(osservo che $(\pi_+ \circ P + \varphi_0 \circ Q) \circ w = w_+ + r$ *con* r *a rango finito e quindi* $\in \mathcal{A}_+$*). L'isomorfismo così costruito è indipendente dalle scelte fatte.*

Osserviamo quindi che $det_{W^\perp}^* = \bigwedge^{max} K_{W^\perp}^* \otimes \bigwedge^{max} C_{W^\perp} \cong \bigwedge^{max} C_W \otimes \bigwedge^{max} K_W^*$ e quindi che $det_{W^\perp}^* \cong det_W^*$ in modo canonico.
Quindi abbiamo che il pull back $(\mu^* det^*)$ di det^* tramite μ è isomorfo a det^*. Si può quindi definire $\tilde{\mu} : det^* \rightarrow det^*$ sollevamento di μ. Lo stesso risultato si può ottenere per *det*. In seguito ci sarà però utile l'enunciato per det^* . In particolare userò la seguente proposizione

Proposizione 1.4
1) $\tilde{\mu}^2 \;=\; Id$
2)$\tilde{\mu}_{|det^*_{H_+}} \;=\; Id$
3)$\tilde{\mu} \circ \sigma \;=\; \sigma \circ \mu.$

1.4 Il gruppo G

Nel caso di dimensione finita $GL(H)$ agisce sulla grassmanniana.

Nel caso di dimensione infinita bisogna sostituire $GL(H)$ con un altro gruppo.

Gli elementi φ di $\mathcal{L}(H) = gl(H) = \{\varphi \;:\; H \mapsto H$ lineari e continue$\}$ li penseremo decomposti secondo la decomposizione di $H = H_+ \bigoplus H_-$ cioè

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{++} & \varphi_{+-} \\ \varphi_{-+} & \varphi_{--} \end{pmatrix}$$

con $\varphi_{\lambda\mu} \in \mathcal{B}_{\lambda\mu}$.

Definizione 1.8

$$G\mathcal{L}(H) = \{\varphi \in gl(H) \;:\; \varphi \textit{ è invertibile}\}$$

$$G = \{\varphi \in G\mathcal{L}(H) \;:\; \varphi_{++} \textit{ è Fredholm di indice 0}\}$$

$$G_+ = \{\varphi \in G \;:\; \varphi_{-+} = 0 \quad e \quad \varphi_{++} \quad invertibile\}$$

$$G_- = \{\varphi \in G \;:\; \varphi_{+-} = 0 \quad e \quad \varphi_{++} \quad invertibile\}$$

$$\mathcal{E} = \{(g,q) \;:\; g \in G \; e \, q \in \Sigma_g \; ovvero \, gq^{-1} - 1 \in \mathcal{T}_+\}$$

Osserviamo che Σ_I agisce su $\mathcal{E}$ a sinistra con $t(g,q) = (g,tq)$ e, posto $\Sigma_{I,1} = \{t \in \Sigma_I \;:\; det\, t = 1\}$ definisco

$$\widehat{G} = \frac{\mathcal{E}}{\Sigma_{I,1}}$$

Rimane subito definita una proiezione da $\widehat{G}$ in G.

Userò frequentemente la seguente notazione: per $g \in G$ indicherò con $\hat{g}$ un elemento di $\widehat{G}$ della forma (g,q).

Il seguente lemma racchiude le semplici verifiche che danno senso alle definizioni precedenti e descrive l'azione di G su Gr e di $\widehat{G}$ su det e det^*.

Lemma 1.6

1. *G è sottogruppo di $G\mathcal{L}(H)$*
2. *G agisce su Gr*
3. *Vale la seguente successione esatta di gruppi:*

$$1 \to \mathbb{C}^* \to \widehat{G} \to G \to 1$$

4. *$\widehat{G}$ agisce su det e l'azione è data, per $(g,q) \in \widehat{G}$ e $(\omega, \delta) \in det$, da $(g,q)(\omega,\delta) = (g\omega q^{-1}, \delta)$*
5. *La corrispondente azione su det^* è $(g,q)(\omega,\delta^*) = (g\omega q^{-1}, \delta^*)$*

Dimostrazione:

1. Siano $\varphi, \psi \in G$; $(\varphi\psi)_+ = \varphi_{++}\psi_{++} + \varphi_{+-}\psi_{-+}$ per il lemma 1 è Fredholm di indice 0.

   Per verificare che l'inverso appartiene a G osserviamo che, se $\varphi \in G$ e $\psi = \varphi^{-1}$, allora $\varphi_{++}\psi_{++} = 1 - \varphi_{+-}\psi_{-+} = F_1$ e $\psi_{++}\varphi_{++} = 1 - \psi_{+-}\varphi_{-+} = F_2$ sono Fredholm di indice 0.

   Se φ_{++} fosse invertibile si avrebbe subito la tesi. Altrimenti bisogna decomporre H in sottospazi in cui φ_{++}, F_1, F_2 risultino invertibili e si ottiene, con leggero maggior sforzo, la tesi.

2. La verifica è analoga alla precedente.

3., 4. e 5. sono banali; basta osservare che se $\omega \in \mathcal{A}$ allora $g\omega q^{-1} \in \mathcal{A}$

■

Osservo infine che i sottogruppi G_+ e G_- ammettono una sezione su $\widehat{G}_+$ e $\widehat{G}_-$ ed è data da $\varphi \mapsto (\varphi, \varphi_{++})$.

1.5 I gruppi $\Gamma_+^{(n)}$, $\Gamma_-^{(n)}$ e il gruppo Λ

Osservo che $H = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{O}\left(D_\varepsilon^*\right)$ e quindi H ha una struttura di anello indotta dall'usuale prodotto di funzioni olomorfe e che tale prodotto risulta essere un'applicazione bilineare e continua. Quindi $gl(n, H)$ agisce in modo naturale su $H^{(n)}$ e si immerge così in $gl_{\mathbb{C}}(H^{(n)})$ e $GL(n, H)$ in $GL_{\mathbb{C}}(H^{(n)})$. Tali immersioni sono monomorfismi di gruppi.

In analogia con quanto fatto per $v_l = z^l$ introduco le seguenti notazioni e definizioni.

Definizione 1.9 *Sia* $v_l^{(i)} = (0, \ldots, z^l, \ldots, 0)$ *e sia* $e_{kl}^{(ij)} v_m^{(h)} = \delta_{hj} \delta_{lm} v_k^{(i)}$*. Per l'isomorfismo descritto tra* $H^{(1)}$ *e* $H^{(n)}$ *abbiamo che* $v_l^{(i)} = v_{i+n(l-1)}$ *e che* $e_{kl}^{(ij)} = e_{i+n(k-1), j+n(l-1)}$*.*

Sia inoltre $H_i = \{(0, f_i, 0) : f_i \in H\}$*.*

Sia infine $E_{lk} = \sum_{i=1}^n e_{lk}^{(ij)}$*.*

Per una matrice $A \in Mat_n(\mathbb{C})$ ha senso parlare di AE_{lk} pensando A come applicazione da $< v_k^1, \ldots, v_k^n >$ in $< v_l^1, \ldots, v_l^n >$. Osservo che se $\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m z^m \in gl(n, H)$ con $A_m \in Mat_n(\mathbb{C})$ il corrispettivo elemento di $gl(H^n)$ è $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\infty}^{\infty} A_{l-k} E_{lk}$ e viceversa tutti gli elementi di questo tipo derivano da H-omomorfismi.

Osservazione 1.3 $\varphi \in GL(n, H)$ *non implica* $\varphi \in G$*. Per esempio nel caso* $n = 1$ *e* $\varphi = z$ *si ha che* $zH_+ \notin Gr$*.*

Osserviamo però che se $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m$ *e* A_0 *è invertibile allora* $\varphi \in G_+$*. Infatti* φ_{++} *è invertibile e quindi Fredholm di indice zero e* $\varphi_{-+} = 0$*.*

Introduco quindi i seguenti sottogruppi di G_+ e G_-.

Definizione 1.10

$$\Gamma_+^{(n)} = \{e^A \quad con \quad A = \begin{pmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in H_+^{(n)}\}$$

$$\Gamma_-^{(n)} = \{e^A \quad con \quad A = \begin{pmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in H_-^{(n)}\}$$

Indicherò questi elementi con e^f.

Definisco inoltre

$$\Lambda = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{Z}^n \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0\}$$

Penserò Λ come sottogruppo discreto di $GL(n, H)$; indicherò infatti per $\lambda \in \Lambda$ con $z^\lambda = \begin{pmatrix} z^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Lemma 1.7

$$\lambda \in \Lambda \quad \Longrightarrow \quad z^\lambda \in G$$

Dimostrazione: Bisogna verificare che $(z^\lambda)_{++}$ è Fredholm di indice zero.

Supponiamo che siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \geq$ e $\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_n < 0$. Sia K il nucleo di $(z^\lambda)_{++}$ e R l'immagine.

Abbiamo $K =< \{v_l^{(i)} : \quad i \in \{s+1, \ldots, n\}$ *e* $1 \leq l \leq -\lambda_i\} >$ e quindi $\dim K = -\sum_{i=s+1}^n \lambda_i$.

$R = z^{\lambda_1} H_{1+} \oplus \ldots \oplus z^{\lambda_s} H_{s+} \oplus H_{s+1,+} \oplus \ldots \oplus H_{n+}$ è chiuso di $H_+^{(n)}$. Un suo complementare è dato da $C = \{v_l^{(i)} \quad i \in \{1 \ldots s\} e1 \leq l \leq \lambda_i\} >$ e quindi $\dim C = \sum_{i=1}^s \lambda_i$.

Da $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ si ottiene la tesi.

∎

Quindi $z^\lambda e^f \in G \quad \forall f \in H_+ \, \forall \lambda \in \Lambda$

Studio ora come si comportano questi gruppi rispetto all'estensione $\widehat{G}$ di G. Poiché $\Gamma_+^{(n)} \subset G_+$ esiste una sezione di $\Gamma_+^{(n)}$ su $\widehat{G}$ e analogamente si ragione per $\Gamma_-^{(n)}$.

Quindi $\Gamma_+^{(n)}$ e $\Gamma_-^{(n)}$ agiscono su det e det^*. Per $e^f \in \Gamma_+^{(n)}$ o $e^f \in \Gamma_-^{(n)}$ indico con $\widehat{e^f}$ il corrispettivo automorfismo di det^*.

Proposizione 1.5 *Sia $f \in H_+^{(n)}$ e $\tilde{f} \in H_-^{(n)}$ allora:*

$$\widehat{e^f}\widehat{e^{\tilde{f}}} = e^{S(f,\tilde{f})}\widehat{e^{\tilde{f}}}\widehat{e^f}$$

con

$$S(f, \tilde{f}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z^{-1}|<\varepsilon} < f, \tilde{f}' > dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z^{-1}|<\varepsilon} \sum_{i=1}^n f_i, \tilde{f}_i{}' dz$$

Dimostrazione: Sia $(w, \delta^*) \in det^*$ $g = e^f = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ $\tilde{g} = e^{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}$ otteniamo.

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{g}}\widehat{g} &= (\tilde{g}gwa^{-1}\tilde{a}^{-1}, \delta^*) \\ \widehat{g}\widehat{\tilde{g}} &= (g\tilde{g}wa^{-1}\tilde{a}^{-1}\tilde{g}, \delta^*) \end{aligned}$$

Da $\tilde{g}g = g\tilde{g}$ si ricava che $a\tilde{a}+b\tilde{c} = \tilde{a}a$ e quindi che $\tilde{a}a\tilde{a}^{-1}a^{-1} = 1+b\tilde{c}\tilde{a}^{-1}a^{-1} \in A_+$ da cui

$$\widehat{\tilde{g}}\widehat{g} = det(\tilde{a}a\tilde{a}^{-1}a^{-1})\widehat{g}\widehat{\tilde{g}} = e^{tr[\tilde{\alpha},\alpha]}\widehat{g}\widehat{\tilde{g}}$$

.Dove $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ e $\tilde{f} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & 0 \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta} \end{pmatrix}$ e $f_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ 0 & \delta_i \end{pmatrix}$ e $\tilde{f}_i = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_i & 0 \\ \tilde{\gamma}_i & \tilde{\delta}_i \end{pmatrix}$.

Quindi $tr[\tilde{\alpha}, \alpha] = \sum_i tr[\tilde{\alpha}_i, \alpha_i] = \sum_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{h=m}^{\infty} a_h^i b_h^i = \sum_i \sum_{h=1}^{\infty} h\ a_h^i b_h^i$ dove $f_i = \sum_{h=1}^{\infty} a_h^i z^h$ e $\tilde{f}_i = \sum_{h=1}^{\infty} b_h^i z^{-h}$.

E infine $S(f, \tilde{f}) = tr[\alpha, \tilde{\alpha}] = \sum_{i=1}^{n} Res_0\ \tilde{f}_i'\ f_i$ ■

Non esistono invece sezioni che siano omomorfismi di gruppi per $\Lambda \subset G$. Studio quindi come $\widehat{\Lambda}$ agisce su det^*, e definirò una sezione (che sarà soltanto una funzione di insiemi) che considererò fissata. Indicherò con $\widehat{Gd}$ l'immagine di $\widehat{G}$ negli automorfismi di det^*.

Definizione 1.11 *per* $1 \leq i \leq n$ *sia* $\delta_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$
e sia per $1 \leq i, j \leq n$ $\lambda_{ij} = \delta_i - \delta_j$

Proposizione 1.6 *Sia* $f \in H_+$ *o* $f \in H_-$ *e* $\lambda \in \Lambda$
Quindi $e^f \in G$ *e* $\widehat{e^f} \in \widehat{Gd}$ *e sia* $\widehat{z^\lambda}$ *l'immagine in* $\widehat{Gd}$ *di* $(z^\lambda, q) \in \widehat{G}$. *Allora*

$$\widehat{e^f}\widehat{z^\lambda} = \widehat{z^\lambda}\widehat{e^f}$$

Dimostrazione: Divido la dimostrazione in vari passaggi.

1^o Passo Ragionando come nella proposizione precedente si ricava che $\widehat{e^f}\widehat{z^\lambda} = c^+(\lambda, f)\widehat{z^\lambda}\widehat{e^f}$ e $c^+(\lambda, f) = det(aqa^{-1}q^{-1})$

2^o Passo Dalla formula precedente è immediato verificare che c^+ è un bi-omomorfismo a valori in $\mathbb{C}^*$

Basta quindi dimostrare la proposizione nel caso $\lambda = \lambda_{ij}$ con $i \neq j$ e $f = (t_1 z^{m_1}, \ldots, t_n z^{m_n})$. Studio il caso $f \in H_+$ ovvero $m_h > 0$.

$$\begin{aligned}
a &= (\widehat{e^f})_{++} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t_l^{m_l m}}{m!}e^{(hh)}_{l+m_l m,l}\\
b &= (\widehat{e^f})_{+-} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{l=-\infty}^{0}\sum_{m\geq\frac{1-l}{m_h}}^{\infty}\frac{t_l^{m_h m}}{m!}e^{(hh)}_{l+m_h m,l}\\
A &= \sum_{h\neq i,j}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{(hh)}_{mm} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{(ii)}_{m+1,m} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{(jj)}_{m-1,m}\\
A_{++} &= \sum_{h\neq i,j}\sum_{m=1}^{\infty}e^{(hh)}_{mm} + \sum_{m=1}^{\infty}e^{(ii)}_{m+1,m} + \sum_{m=2}^{\infty}e^{(jj)}_{m-1,m}\\
A_{+-} &= e^{(ii)}_{1,0}\\
A_{-+} &= e^{(jj)}_{0,1}\\
A_0 &= e^{(ij)}_{11}
\end{aligned}$$

Naturalmente la regola di commutazione è indipendente dalla scelta di q. Io sceglierò

$$q = A_{++} + A_0$$

Ora osservo che da $z^{-\lambda}e^f = e^f z^{-\lambda}$ si ricava $a\,{}^tA_{++}a^{-1} = {}^tA_{++} - b\,{}^tA_{+-}a^{-1}$ e che $q^{-1} = {}^tq$.

Quindi $qaq^{-1}a^{-1} = q({}^tA_{++} - b\,{}^tA_{+-}a^{-1} + a\,{}^tA_0a^{-1}) = I + q(a\,{}^tA_0a^{-1} -{}^t A_0 - b\,{}^tA_{+-}a^{-1})$

$a\,{}^tA_0a^{-1} = ae^{(ji)}_{11}a^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t_j^{m_j m}}{m!}e^{(ji)}_{1+m_j m,1}$

$b\,{}^tA_{+-}a^{-1} = be^{(ii)}_{01} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{t_i^{m_i m}}{m!}e^{(ii)}_{m_i m,1}$

$A_0a\,{}^tA_0a^{-1} = e^{(ij)}_{11}a\,{}^tA_0a^{-1} = e^{(ii)}_{11}$

$A_0\,{}^tA_0 = e^{(ii)}_{11}$

$A_0b\,{}^tA_{+-}a^{-1} = e^{(ij)}_{11}b\,{}^tA_{+-}a^{-1} = 0$

$A_{++}a\,{}^tA_0a^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{t_j^{m_j m}}{m!}e^{(ji)}_{m_j m,1}$

$A_{++}\,{}^tA_0 = 0$

$A_{++}b\,{}^tA_{+-}a^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{t_i^{m_i m}}{m!}e^{(ii)}_{1+m_i m,1}$

quindi

$qaq^{-1}a^{-1} = I + e_{11}^{(ii)} - e_{11}^{(ii)} - 0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_j^{m_j m}}{m!} e_{m_j m,1}^{(ji)} - 0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_i^{m_i m}}{m!} e_{1+m_i m,1}^{(ii)}$
da cui

$$det(qaq^{-1}a^{-1}) = 1$$

La dimostrazione nel caso di $f \in H_-^{(n)}$ è analoga, salvo per una piccola complicazione dovuta al caso $m_h = 0$, per il quale la formula per b va interpretata opportunamente.

■

Proposizione 1.7 *Se* $\lambda, \mu \in \Lambda$ *e se* $\widehat{z^\lambda}, \widehat{z^\mu}$ *sono l'immagine in* $\widehat{Gd}$ *di* (z^λ, q_λ) *e di* $(z^\mu, q_\mu) \in \widehat{G}$ *allora*

$$\widehat{z^\lambda}\widehat{z^\mu} = (-1)^{{}^t\mu\lambda}\widehat{z^\mu}\widehat{z^\lambda}$$

Dimostrazione: Procedendo come nelle proposiioni precedenti si ottiene

$$\widehat{z^\lambda}\widehat{z^\mu} = c(\lambda, \mu)\widehat{z^\mu}\widehat{z^\lambda}$$

dove $c(\lambda, \mu) = det(q_\lambda q_\mu q_\lambda^{-1} q_\mu^{-1})$ è quindi una funzione bimoltiplicativa.

Basta quindi dimostrare che $c(\lambda_{ij}, \lambda_{hk} = (-1)^{\delta_{ik}+\delta_{ih}+\delta_{jk}+\delta_{jh}}$

Pongo:

$A = z^\lambda = \sum_{l \neq i,j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_{mm}^{(ll)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_{m+1,m}^{(ii)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_{m-1,m}^{(jj)}$

$A_{++} = \sum_{l \neq i,j} \sum_{m=1}^{\infty} e_{mm}^{(ll)} + \sum_{m=1}^{\infty} e_{m+1,m}^{(ii)} + \sum_{m=2}^{\infty} e_{m-1,m}^{(jj)}$

$A_{+-} = e_{1,0}^{(ii)}$

$A_{-+} = e_{0,1}^{(jj)}$

$A_0 = e_{11}^{(ij)}$

$q_\lambda = q = A_{++} + A_0$

$B = z^\mu = \sum_{l \neq h,k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_{mm}^{(ll)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_{m+1,m}^{(hh)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_{m-1,m}^{(kk)}$

$B_{++} = \sum_{ll \neq h,k} \sum_{m=1}^{\infty} e_{mm}^{(ll)} + \sum_{m=1}^{\infty} e_{m+1,m}^{(hh)} + \sum_{m=2}^{\infty} e_{m-1,m}^{(kk)}$

$B_{+-} = e_{1,0}^{(hh)}$

$B_{-+} = e_{0,1}^{(kk)}$

$B_0 = e_{11}^{(hk)}$

$q_\mu = p = B_{++} + B_0$

Abbiamo:

$A_0 B_0 = \delta_{jh} e_{11}^{(ik)}$

$$A_0B_{++} = e_{11}^{(ij)}B_{++} = \begin{cases} e_{11}^{(ij)} & \text{se } j \neq h,k \\ 0 & \text{se } j = h \\ e_{12}^{(ij)} & \text{se } j = k \end{cases}$$

$$A_{++}B_0 = A_{++}e_{11}^{(hk)} = \begin{cases} e_{11}^{(hk)} & \text{se } h \neq i,j \\ 0 & \text{se } h = j \\ e_{21}^{(hk)} & \text{se } h = i \end{cases}$$

Ora da $z^\lambda z^\mu = z^\mu z^\lambda$ si ricava

$A_{++}B_{++}\,{}^tA_{++}\,{}^tB_{++} = B_{++}A_{++}\,{}^tA_{++}\,{}^tB_{++} + B_{+-}A_{-+}\,{}^tA_{++}\,{}^tB_{++} - A_{+-}B_{-+}\,{}^tA_{++}\,{}^tB_{++}$

e $A_{++}\,{}^tA_{++} = I - e_{11}^{(ii)}$ e $B_{++}\,{}^tB_{++} = I - e_{11}^{(hh)}$ dunque

$$B_{++}A_{++}{}^tA_{++}{}^tB_{++} = I - e_{11}^{(hh)} - B_{++}e_{11}^{(ii)}{}^tB_{++} = \begin{cases} I - e_{11}^{(hh)} - e_{11}^{(ii)} & \text{se } i \neq h,k \\ I - e_{11}^{(hh)} - e_{22}^{(ii)} & \text{se } i = h \\ I - e_{11}^{(hh)} & \text{se } i = k \end{cases}$$

$B_{+-}A_{-+}\,{}^tA_{++}\,{}^tB_{++} = e_{10}^{(hh)}e_{01}^{(jj)}\,{}^tA_{++}\,{}^tB_{++} = e_{10}^{(hh)}0\,{}^tB_{++} = 0$

$A_{+-}B_{-+}\,{}^tA_{++}\,{}^tB_{++} = e_{10}^{(ii)}e_{01}^{(kk)}\,{}^tA_{++}\,{}^tB_{++} = \delta_{ik}e_{12}^{(ii)}\,{}^tB_{++} = \delta_{ik}e_{11}^{(ii)}$

Dividiamo in casi

$i = j$ o $j = k$ è banale

$i = h$ e $j = k$ o se $i = k$ e $j = h$ è banale

rimangono i casi

$i = h$ e $j \neq k$

$i = k$ e $j \neq h$

$j = k$ e $i \neq h$

$j = h$ e $i \neq k$

Completo i calcoli solo nel secondo caso essendo gli altri del tutto analoghi:

$$qpq^{-1}p^{-1} = (A_{++}B_{++}+A_{++}B_0+A_0B_{++}+A_0B_0)({}^tA_{++}{}^tB_{++}+{}^tA_{++}{}^tB_0+{}^tA_0{}^tB_{++}+{}^tA_0{}^tB_0 =$$

$$= (A_{++}B_{++} + e_{11}^{(hk)} + e_{11}^{(ij)} + 0)({}^tA_{++}\,{}^tB_{++} + e_{11}^{(jh)} + 0 + 0) =$$

$$= A_{++}B_{++}{}^tA_{++}{}^tB_{++}+A_{++}B_{++}e_{11}^{(jh)}+e_{11}^{(hk)t}A_{++}\,{}^tB_{++}+e_{11}^{(ij)t}A_{++}\,{}^tB_{++}+e_{11}^{(hk)}e_{11}^{(jh)}+e_{11}^{(ij)}e_{11}^{(jh)} =$$

$$= I - e_{11}^{(hh)} + A_{++}e_{11}^{(jh)} + 0 + e_{12}^{(hk)}\,{}^tB_{++} + e_{11}^{(ih)} = I - e_{11}^{(hh)} + e_{11}^{(hi)} + e_{11}^{(ih)}$$

e quindi $det(qpq^{-1}p^{-1}) = -1$

■

Proposizione 1.8 *Siano* $\mu, \lambda \in \Lambda \quad f \in H_+^{(n)} \quad \tilde{f} \in H_-^{(n)}$ *e siano* $\widehat{z^\lambda}, \widehat{z^\mu}, \widehat{e^f}\widehat{e^{\tilde{f}}}$ *loro sollevati in* $\widehat{G}d$

$$\widehat{z^\lambda}\widehat{e^f}\,\widehat{z^\mu}\widehat{e^{\tilde{f}}} = (-1)^{{}^t\mu\lambda}\, e^{S(f,\tilde{f})}\,\widehat{z^\mu}\widehat{e^{\tilde{f}}}\,\widehat{z^\lambda}\widehat{e^f}$$

dove

$$S(f,\tilde{f}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z^{-1}|<\varepsilon} < f, \tilde{f}' > dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z^{-1}|<\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} f_i, \tilde{f}_i{}' dz$$

Dimostrazione: È una conseguenza immediata delle precedenti tre proposizioni

■

Le relazioni ricavate mi permettono di definire un modo canonico di sollevare Λ a $\hat{G}$ e quindi a $\widehat{Gd}$.

Definizione 1.12
Sia $\widehat{z^{\lambda_{ij}}}$ *l'immagine in* $\widehat{Gd}$ *dell'elemento di* $\hat{G}$ *dato da* $(z^{\lambda_{ij}}, (z^{\lambda_{ij}})_{++} + e_{11}^{(ij)})$

Definisco per $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda$

$$\widetilde{z^\lambda} = \widetilde{z^{\lambda_{21}}}^{\lambda_2} \ldots \widetilde{z^{\lambda_{n1}}}^{\lambda_n}\ i^{\lambda_1^2}$$

Sia inoltre ε *la forma bimoltiplicativa definita su* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *da:*

$$\varepsilon(\delta_i, \delta_j) = \begin{cases} -1 & se\ i > j \\ 1 & se\ i \leq j \end{cases}$$

La seguente proposizione è una conseguenza delle proposizioni precedenti

Proposizione 1.9 *Per* $\lambda, \mu \in \Lambda$ *si ha*

$$\widehat{z^{\lambda+\mu}} = \varepsilon(\lambda,\mu)\widehat{z^\lambda}\widehat{z^\mu}$$

Osservo infine come si comporta $\widehat{e^f}$ rispetto alla sezione σ .

Proposizione 1.10 *Se* $f \in H_-$ *allora* $\sigma(e^f W) = \widehat{e^f}\sigma(W)$

Dimostrazione: Sia $e^f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ e sia $w = \begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(W)$ allora

$$\sigma(e^f W) = (\begin{pmatrix} aw_+ \\ cw_+ + dw_- \end{pmatrix} a^{-1}, Det\, aw_+a^{-1}) = \widehat{e^f}(w, Det\, w_+)$$

■

1.6 La funzione τ

Definizione 1.13 *Sia* $\delta^*_W \in det^*_W$ *con* $W \in Gr$ *e* $\delta^*_W \neq 0$

Sia $\lambda \in \Lambda$*; definisco* $\tau_{\delta^*_W,\lambda} : \Gamma_+^{(n)} \mapsto \mathbb{C}$

$$\tau_{\delta^*_W,\lambda}(e^f) = \frac{\sigma(e^{-f}z^{-\lambda}W)}{\widehat{z^{-\lambda}}\widehat{e^{-f}}\delta^*_W}$$

e $\tau_{\delta^*_W} = \tau_{\delta^*_W,0}$

Osservo e ciò mi sarà utile che τ *si può definire anche con dominio* G_+.

Indicherò con τ_W *una* τ_{δ_W}*;* τ_W *è quindi definita a meno di costante.*

Proposizione 1.11

1. $\tau_{\delta^*_W,\lambda}(e^f) = \tau_{\widehat{z^{-\lambda}}\delta^*_W}(e^f)$

2. $W \in Gr$ *e* $w \in \mathcal{A}(W)$ *e* $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G_+$ *allora*

   $\tau_W(g) = Det(w_+ + a^{-1}bw_-)$

3. *Sia* $W \in \mathcal{W}$ *e* $W = Grafico\, A$ *e sia* g *come nel punto 2 e sia* $i \neq j$*; allora*

   $\tau_{\sigma(W),\lambda_{ij}}(g) = \varepsilon(\delta_j,\delta_i)(-1)^{\delta_{i1}}i^{\delta_{i1}+\delta_{j1}}det(I - e^{(jj)}_{11} + e^{(jj)}_{10}A^t q_{ji} + a^{-1}b(e^{(ij)}_{01} + (z^{\lambda_{ji}})_{--}A^t q_{ji}))$

   dove $q_{ji} = (z^{\lambda_{ji}})_{++} + e^{(ji)}_{11}$

Dimostrazione:

1) e 2) seguono immediatamente dalla definizione

3) Devo calcolare $\tau_{\widehat{z^{-\lambda_{ij}}}\sigma(W)}(g)$. Osservo che $(I,A) \in \mathcal{A}(W)$ e che $\sigma(I,A) = ((I,A),1)$. Osservo inoltre che $\widehat{z^{-\lambda_{ij}}} = C(z^{\lambda_{ji}}, q_{ji})$ e pongo $\begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix} = z^{\lambda_{ji}} \begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix} q_{ji}^{-1}$ Ottengo:

$$\begin{aligned} w_+ &= I - e^{(jj)}_{11} + e^{(jj)}_{10}A\,{}^t q_{ji} \\ w_- &= e^{(ij)}_{01} + (z^{\lambda_{ji}})_{--}\,A\,{}^t q_{ji} \end{aligned}$$

Devo infine calcolare C

Se $i = 1$ o $j = 1$ si ha $C = i$

Se $j > i > 1$ allora $\widehat{z^{-\lambda_{ij}}} = \widetilde{z^{\lambda_{i1}}}^{-1}\widetilde{z^{\lambda_{j1}}} = (z^{\lambda_{ij}},\ {}^{t}q_{i1}q_{j1})$

$$p = {}^{t}q_{i1}q_{j1} = (z^{-\lambda_{ij}})_{++} - (z^{-\lambda_{i1}})_{+-}(z^{\lambda_{j1}})_{-+} + e_{11}^{(1i)}(z^{\lambda_{j1}})_{++}(z^{-\lambda_{i1}})_{++}e_{11}^{(j1)} + e_{11}^{(1i)}e_{11}^{(j1)} =$$

$$= (z^{-\lambda_{ij}})_{++} + e_{10}^{(11)}e_{01}^{(11)} + e_{11}^{(1i)} + e_{11}^{(j1)} + 0 =$$

$$= q_{ji} - e_{11}^{(ji)} - e_{11}^{(11)} + e_{11}^{(1i)} + e_{11}^{(j1)}$$

quindi $q_{ji}p^{-1} = I - e_{11}^{(jj)} - e_{11}^{(11)} + e_{11}^{(j1)}$ e $C = -1$.

Se $i > j > 1$ allora $\widehat{z^{-\lambda_{ij}}} = \widetilde{z^{\lambda_{j1}}}\widetilde{z^{\lambda_{i1}}}^{-1} = (z^{\lambda_{ij}}, q_{j1}\, q_{i1})$

$${}^{t}q_{i1}q_{j1} = q_{ji} \qquad \text{e quindi } C = 1$$

■

1.7 Λ, $\Gamma_{+}^{(n)}$, τ e la dualità.

In quest'ultimo paragrafo del capitolo 1 studierò come si comportano gli elementi di Λ, $\Gamma_{+}^{(n)}$ e τ rispetto alla dualità.

Lemma 1.8

1. *Sia $f \in H^{(n)}$; allora $(e^{f}W)^{\perp} = e^{-f}W^{\perp}$;*

2. *sia $\lambda \in \Lambda$; allora $(z^{\lambda}W)^{\perp} = z^{-\lambda}W$.*

Dimostrazione: Basta osservare che $(e^{f}g_1; g_2) = (g_1; e^{f}g_2)$ e che $(z^{\lambda}g_1; g_2) = (g_1; z^{\lambda}g_2)$ ■

Lemma 1.9

1. *Se $f \in H_{+}^{(n)}$, $\tilde{\mu} \circ \widehat{e^{f}} = \widehat{e^{-f}} \circ \tilde{\mu}$;*

2. *se $\lambda \in \Lambda$, $\tilde{\mu} \circ \widehat{z^{\lambda}} = c(\lambda)\widehat{z^{-\lambda}} \circ \tilde{\mu}$ dove c è un carattere di Λ.*

Dimostrazione: 1) Per il lemma precedente $\tilde{\mu} \circ \widehat{e^f} \circ \tilde{\mu} \circ \widehat{e^f}$ è un isomorfismo di det^* che lascia fissa la base. Quindi è un multiplo dell'identità. Per dimostrare che è proprio l'identità basta calcolare il suo valore in $\sigma(H_+)$.

$$\tilde{\mu} \circ \widehat{e^f}\, \sigma(H_+) = \tilde{\mu} \circ \widehat{e^f}(\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, 1) = \tilde{\mu}\sigma(H_+) = \sigma(H_+)$$

$$\widehat{e^{-f}} \circ \tilde{\mu}\, \sigma(H_+) = \widehat{e^{-f}}\sigma(H_+) = \sigma(H_+)$$

2) Analogamente al caso precedente si ottiene che:

$$\tilde{\mu} \circ \widehat{z^\lambda} = c(\lambda)\, \widehat{z^{-\lambda}} \circ \tilde{\mu}.$$

Sviluppando $\tilde{\mu} \circ \widehat{z^{\lambda_1+\lambda_2}}$ si verifica immediatamente che c è un carattere di Λ

■

Da questi due lemmi si può dedurre facilmente la seguente formula per $\tau_{W^\perp}$.

Proposizione 1.12

$$\tau_{\tilde{\mu}\delta_W^*,\lambda}(e^f) = c(\lambda)\tau_{\delta_W^*,-\lambda}(e^{-f})$$

Dimostrazione:

$$\tau_{\tilde{\mu}\delta_W^*,\lambda}(e^f) = \frac{\sigma(z^{-\lambda}e^{-f}W)}{\widehat{e^{-f}}\widehat{z^{-\lambda}}\tilde{\mu}\delta_W^*} = c(\lambda)\frac{\sigma((z^\lambda e^f W)^\perp)}{\tilde{\mu}\widehat{e^f}\widehat{z^\lambda}\delta_W^*} =$$

$$= c(\lambda)\frac{\tilde{\mu}\sigma(z^\lambda e^f W)}{\tilde{\mu}\widehat{e^f}\widehat{z^\lambda}\delta_W^*} = c(\lambda)\frac{\tilde{\mu}\sigma(z^\lambda e^f W)}{\tilde{\mu}\widehat{e^f}\widehat{z^\lambda}\delta_W^*} = c(\lambda)\tau_{\delta_W^*,-\lambda}(e^{-f})$$

■

Capitolo 2

La funzione Ψ e l'equazione K.P. a n componenti nella forma bilineare di Hirota

Ad ogni elemento W di Gr si può associare una matrice $n \times n \quad \Psi_W$ a coefficienti in H funzione di Λ e di $\Gamma_+^{(n)}$. Per costruzione risulterà che Ψ_W e $\Psi_{W^\perp}$ risolvono un'equazione nella variabile g di $\Gamma_+^{(n)}$.

Dimostrerò quindi come la matrice Ψ_W sia legata alla funzione τ, fornendo una formula esplicita che esprime la Ψ in funzione della τ . Sostituendo questo risultato nell'equazione che risolvono Ψ_W e $\Psi_{W^\perp}$, dimostrerò che la τ risolve l'equazione K.P. a n componenti.

2.1 La funzione Ψ

Definizione 2.1 *Sia $W \in Gr$ e $\lambda \in \Lambda$*

$$\Gamma_{+W}^{(n)}(\lambda) = \{g \in \Gamma_+^{(n)} : g^{-1}z^{-\lambda}W \in \mathcal{W}\} = \Gamma_{+z^{-\lambda}W}^{(n)}$$

Osservo che $g \in \Gamma_{+W}^{(n)}(\lambda) \leftrightarrow \sigma(g^{-1}z^{-\lambda}W) \neq 0$ e quindi che $\Gamma_{+W}^{(n)}(\lambda)$è un denso aperto di $\Gamma_{+W}^{(n)}$. Definisco $\tilde{\Psi}_W(\lambda)$ e $\Psi_W(\lambda) : \Gamma_{+W}^{(n)}(\lambda) \to gl(n, H)$ nel seguente modo.

sia $g \in \Gamma^{(n)}_{+W}(\lambda)$ *e sia per* $i = 1 \dots n$ $\tilde{\Psi}_i(\lambda, g) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{1i}(\lambda, g) \\ \vdots \\ \tilde{\Psi}_{ni}(\lambda, g) \end{pmatrix} \in g^{-1}z^{-\lambda}W$ *l'unico elemento della forma* $v_1^{(i)} + w_i$ *con* $w_i \in H_-^{(n)}$.

$$\begin{aligned} &Sia \quad \tilde{\Psi}_W(\lambda, g) = (\tilde{\Psi}_{ij}(\lambda, g)) \\ &e\ sia \quad \Psi_W(\lambda, g) = gz^{\lambda}\tilde{\Psi}_W(\lambda, g) \end{aligned}$$

Osservazione 2.1 *Osservo che*

1. $\Gamma^{(n)}_{+W^{\perp}} = (\Gamma^{(n)}_{+W})^{-1}$

2. $\tilde{\Psi}_W(\lambda, g) = \tilde{\Psi}_{g^{-1}z^{-\lambda}W}(0, 0)$

Proposizione 2.1 *Sia* $W \in Gr$ $\lambda, \mu \in \Lambda$ *e* $g \in \Gamma^{(n)}_{+W}(\lambda)$ *e* $h \in \Gamma^{(n)}_{+W^{\perp}}(\mu)$ *allora*

$$Res_{z=\infty} \quad {}^t\Psi_W(\lambda, g)\ \Psi_{W^{\perp}}(\mu, h)\ dz^{-1} = 0 \tag{2.1}$$

Dimostrazione: Sia $\Psi_{Wj}(\lambda, g) = \begin{pmatrix} \Psi_{1j} \\ \vdots \\ \Psi_{nj} \end{pmatrix}$ e analogamente definisco $\Psi_{W^{\perp}j}$.

Osservo che

$$Res_{z=\infty} \quad {}^t\Psi_W(\lambda, g)\ \Psi_{W^{\perp}}(\mu, h)\ dz^{-1} = \Big(\ (\Psi_{Wi}(\lambda, g)\ ;\ \Psi_{W^{\perp}j}(\mu, h))\ \Big)$$

La tesi segue allora osservando che $\Psi_{Wi}(\lambda, g) \in W$ e $\Psi_{W^{\perp}j}(\mu, h) \in W^{\perp}$. ∎

Osservazione 2.2 *Introduciamo le seguenti notazioni che sono convenzionali nel caso* $n = 1$. *Osserviamo che ogni elemento di* $\Gamma^{(n)}_+$ *si scrive nella forma* $\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^\infty x_l^{(i)} v_l^{(i)}$.
Pensiamo, allora, Ψ_W, $\tilde{\Psi}_W$ *e* τ_W *come funzioni delle variabili* $x_l^{(i)}$ *e scriviamo* $\Psi_W(\lambda, x)$ *per intendere* $\Psi_W(\lambda, e^{x \cdot z})$ *dove*

$$e^{x \cdot z} = \begin{pmatrix} e^{\sum_1^\infty x_l^{(1)} z^l} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\sum_1^\infty x_l^{(n)} z^l} \end{pmatrix} \in \Gamma^{(n)}_+.$$

Osservo inoltre che $\tilde{\Psi}(\lambda, x, z) = zI + \sum_{m=0}^\infty A_m(\lambda, x) z^{-m}$ *con* $A_m \in Mat_n(\mathbb{C})$ *e che* $\Psi(\lambda, x, z) = e^{x \cdot z} z^{\lambda} \tilde{\Psi}(\lambda, x, z)$

Definizione 2.2 *Sia* $q_\zeta(z) = 1 - \frac{z}{\zeta}$

$$e\ sia\ Q^i_\zeta(z) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & q_\zeta(z) & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} \in G_+$$

Proposizione 2.2 *Sia* $W \in Gr\ \lambda \in \Lambda$ *e* $g \in \Gamma^{(n)}_{+W}(\lambda)$ *allora*

$$\tilde{\Psi}_{ji}(\lambda, g, \zeta) = \varepsilon(\lambda_{ij}, \lambda)\, \varepsilon(\delta_j, \delta_i)(-1)^{\delta_{i1}} i^{\delta_{i1}+\delta_{j1}} \zeta^{\delta_{ij}} \frac{\tau_{\lambda+\lambda_{ij}}(gQ^j_\zeta)}{\tau_\lambda(g)} \tag{2.2}$$

Dimostrazione:
1^0 passo

$$\frac{\tau_{\lambda+\lambda_{ij}}(gQ^j_\zeta)}{\tau_\lambda(g)} = \epsilon(\lambda_{ij}, \lambda)\tau_{g^{-1}z^{-\lambda}W, \lambda_{ij}}(Q^j_\zeta) \quad \text{scegliendo } \delta_{z^{-\lambda}g^{-1}W} = \sigma(z^{-\lambda}g^{-1}W)$$

infatti

$$\frac{\tau_{\lambda+\lambda_{ij}}(gh)}{\tau_\lambda(g)} = \frac{\sigma(g^{-1}h^{-1}z^{-\lambda-\lambda_{ij}}W)}{\widehat{g^{-1}}\widehat{h^{-1}}\widehat{z^{-\lambda-\lambda_{ij}}}\delta_W} \frac{\widehat{z^{-\lambda}}\widehat{g^{-1}}\delta_W}{\sigma(z^{-1}g^{-1}W)} = \varepsilon(\lambda_{ij}, \lambda) \frac{\sigma(g^{-1}h^{-1}z^{-\lambda-\lambda_{ij}}W)}{\widehat{h^{-1}}\widehat{z^{-\lambda_{ij}}}\widehat{g^{-1}}\widehat{z^{-\lambda}}\delta_W} \frac{\widehat{z^{-\lambda}}\widehat{g^{-1}}\delta_W}{\sigma(z^{-1}g^{-1}W)}$$

Se ora si pone $\delta_W = \widehat{z^{-\lambda}}^{-1}\hat{g}\sigma(z^{-\lambda}g^{-1}W)$ e $\delta_{z^{-\lambda}g^{-1}W} = \sigma(z^{-\lambda}g^{-1}W)$ si ha l'uguaglianza richiesta per un qualsiasi $h \in G_+$.
2^0 passo

Osservo che per l'osservazione 4 e per la formula del 1^o passo basta dimostrare che per $W \in \mathcal{W}$ si ha:

$$\Psi_{W\,ji}(0, 0, \zeta) = \varepsilon(\delta_j, \delta_i)(-1)^{\delta_{i1}} i^{\delta_{i1}+\delta_{j1}} \tau_{W,\lambda_{ij}}(Q^j_\zeta)$$

Supporremo quindi $W = grafico\,A$
3^o passo

Sia $Q^j_\zeta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G_+$ e siano $m_1 \dots m_n \geq 0$ allora

$$b \begin{pmatrix} z^{-m_1} \\ \vdots \\ z^{-m_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (z^{-m_j}q^{-1}_\zeta(z))_+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e } (z^{-m_j}q^{-1}_\zeta(z))_+ = \frac{z}{\zeta^{m_j+1}} q^{-1}_\zeta(z)$$

e quindi $a^{-1}b(f_1 \dots f_n) = \frac{f_j(\zeta)}{\zeta}\, v_1^{(j)}$.
4^o passo

$$\tau_{\sigma(W),\lambda_{ij}}(g) = \varepsilon(\delta_j, \delta_i)(-1)^{\delta_{i1}} i^{\delta_{i1}+\delta_{j1}} det\, t$$

dove se $i \neq j$ $t = (I - e_{11}^{(jj)} + e_{10}^{(jj)} A\, {}^t q_{ji} + a^{-1}b(e_{01}^{(ij)} + (z^{\lambda_{ji}})_{--} A\, {}^t q_{ji})) = I + B + a^{-1}bC$ e $q_{ji} = (z^{\lambda_{ji}})_{++} + e_{11}^{(ji)}$ secondo le convenzioni del paragrafo 6 del primo capitolo, mentre se $i = j$, $t = I + a^{-1}bA$.
Se $i = j$ allora $t = I + a^{-1}bA$; e poiché l'immagine di $a^{-1}b$ è generata da $v_1^{(j)}$ si ha

$$det\, t = 1 + tr(a^{-1}bA)$$

Osservo allora che per definizione di $\tilde{\Psi}$ si ha che
$Av_1^{(j)} = \left(\tilde{\Psi}_{1j}(z), \dots, \tilde{\Psi}_{jj}(z) - z\,, \dots, \tilde{\Psi}_{nj}(z)\right)$ e quindi
$a^{-1}bA\, v_1^{(j)} = \left(\frac{\tilde{\Psi}_{jj}(\zeta)-\zeta}{\zeta}\right) v_1^{(j)}$ da cui

$$det\, t = \frac{\tilde{\Psi}_{jj}(\zeta)}{\zeta}$$

Se $i \neq j$ procedendo come nel caso precedente calcoliamo

$$Bv_1^{(j)} = -v_1^{(j)} + e_{10}^{(jj)} Av_1^{(i)} = -v_1^{(j)} - \tilde{\Psi}_{ji}(0) v_1^{(j)}$$

$$a^{-1}bCv_1^{(j)} = a^{-1}b(v_1^{(i)} + (z^{\lambda_{ji}})_{--}\, Av_1^{(i)}) =$$

$$= 0 + a^{-1}b\left(\tilde{\Psi}_{1i}(z), \dots z^{-1}\tilde{\Psi}_{ii}(z) - 1 \dots, z\tilde{\Psi}_{ji}(z) - z\tilde{\Psi}_{ji}(0), \dots, \tilde{\Psi}_{ni}(z)\right) =$$

$$= (\tilde{\Psi}_{ji}(\zeta) - \Psi_{ji}(0)) v_1^{(j)}$$

e quindi $(B + a^{-1}bC)v_1^{(j)} = (\tilde{\Psi}_{ji}(\zeta) - 1)v_1^{(j)}$ da cui

$$Det\, t = \tilde{\Psi}_{ji}(\zeta)$$

■

Usando le convenzioni introdotte nell'osservazione precedente la formula (2.2) si può riscrivere nel seguente modo:

$$\tilde{\Psi}_{ji}(\lambda, g, \zeta) = \varepsilon(\lambda_{ij}, \lambda)\varepsilon(\delta_j, \delta_i)(-1)^{\delta_{i1}} i^{\delta_{i1}+\delta_{j1}} \zeta^{\delta_{ij}} \frac{\tau_{\lambda+\lambda_{ij}}(x_l^{(1)}, \dots, x_l^{(j)} - \frac{\zeta^l}{l}, \dots, x_l^{(n)})}{\tau_\lambda(x)}$$

La formula espressa in questa forma ci sarà utile per ricavare le equazioni di Hirota per la τ.

2.2 L'equazione di Hirota per la τ

La proposizione 14 ci permette di rileggere l'equazione (2.1) per la Ψ come un'equazione per τ. Per rendere significativo questo risultato ho bisogno del seguente lemma che esprime in forma compatta lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione f.

Lemma 2.1 *Sia f una funzione olomorfa nelle variabili $x_1, x_2, \dots$ allora*

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) = (e^{\sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i}} f)(x)$$

Riesprimiamo ora i risultati del primo paragrafo usando questo formalismo e i risultati del paragrafo 7 del primo capitolo. Otteniamo

$$\Psi_{Wji}(\lambda, u, z) = \varepsilon(\lambda_{ij}, \lambda)\varepsilon(\delta_j, \delta_i)(-1)^{\delta_{i1}} i^{\delta_{i1}+\delta_{j1}} z^{\delta_{ij}+\lambda_j} e^{\sum_{l=1}^{\infty} u_l^{(j)} z^l} \frac{e^{-\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^{-l}}{l} \frac{\partial}{\partial u_l^{(j)}}} \tau_{\lambda+\lambda_{ij}}(u)}{\tau_\lambda(u)}$$

$$\Psi_{W^\perp jh}(-\mu, -v, z) = \varepsilon(\lambda_{ij}, \mu)\varepsilon(\delta_j, \delta_h)(-1)^{\delta_{h1}} i^{\delta_{h1}+\delta_{j1}} c(-\mu + \lambda_{hj}) c(\mu)^{-1}$$

$$z^{\delta_{hj}+\mu_j} e^{-\sum_{l=1}^{\infty} v_l^{(j)} z^l} \frac{e^{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^{-l}}{l} \frac{\partial}{\partial v_l^{(j)}}} \tau_{\mu-\lambda_{hj}}(v)}{\tau_\mu(v)}$$

Estendo ora il carattere c a tutto $\mathbb{Z}^n$ e pongo $\chi(j) = (-1)^{\delta_j} c(-\delta_j)$. Dalla proposizione 13 e dalle formule precedenti ricaviamo, tirando fuori le costanti e ponendo $\alpha = \lambda + \delta_i$ e $\beta = \mu - \delta_h$,

$$Res_{z=\infty} \sum_{j=1}^{n} \chi(j)\varepsilon(\delta_j, \alpha + \beta)\, z^{(\delta_j|\alpha-\beta)}\, e^{\sum_{l=1}^{\infty}(u_l^{(j)} - v_l^{(j)})z^l}$$

$$e^{-\sum_{l=1}^{\infty}(\frac{\partial}{\partial u_l^{(j)}} - \frac{\partial}{\partial v_l^{(j)}})\frac{z^{-l}}{l}} \tau_{\alpha-\delta_j}(u)\tau_{\beta+\delta_j}(v)\, dz^{-1} = 0.$$

Osserviamo che a differenza della formula (1.1)che vale solo per $e^{u \cdot z} \in \Gamma_{+W}^{(n)}(\lambda)$ e per $e^{-v \cdot z} \in \Gamma_{+W^\perp}^{(n)}(-\mu)$ l'ultima formula, per l'analiticità di τ vale per ogni u, v in $H_+^{(n)}$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$ tali che $(\delta|\alpha) = 1$ e $(\delta|\beta) = -1$ dove $\delta = \delta_1 + \ldots + \delta_n$.

Ponendo $y = \frac{u-v}{2}$ e $x = \frac{u+v}{2}$ otteniamo:

$$Res_{z=\infty} \sum_{j=1}^{n} \chi(j)\varepsilon(\delta_j, \alpha+\beta)\, z^{(\delta_j|\alpha-\beta)}\, e^{2\sum_{l=1}^{\infty} y_l^{(j)} z^l}$$

$$e^{-\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^{-l}}{l} \frac{\partial}{\partial y_l^{(j)}}} \tau_{\alpha-\delta_j}(x+y)\tau_{\beta+\delta_j}(x-y)\, dz^{-1} = 0$$

e esplicitando il calcolo del residuo si ottiene:

$$\sum_{j=1}^{n} \chi(j)\varepsilon(\delta_j, \alpha+\beta) \left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} S_k(2y^{(j)})\, S_{k-1+(\delta_j|\alpha-\beta)}\left(-\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial y_l^{(j)}}\right) \right) \right.$$

$$\left. \tau_{\alpha-\delta_j}(x+y)\, \tau_{\beta+\delta_j}(x-y) \right) = 0$$

dove $S_k(y_1, \ldots) = \sum_{p \text{ multindice e } [p]=k} \frac{1}{p!} y^p$ con $[p] = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots$
ovvero $e^{\sum_{l=1}^{\infty} y_i z^i} = \sum_{l=0}^{\infty} S_l(y) z^l$.
Applicando di nuovo il lemma 1 ottengo:

$$\sum_{j=1}^{n} \chi(j)\varepsilon(\delta_j, \alpha+\beta) \left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} S_k(2y^{(j)})\, S_{k-1+(\delta_j|\alpha-\beta)}\left(-\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial y_l^{(j)}}\right) \right) \right.$$

$$\left. \left(e^{\sum_{h=1}^{n} \sum_{l=1}^{\infty} y_l^{(h)} \frac{\partial}{\partial u_l^{(h)}}} \tau_{\alpha-\delta_j}(x+u)\, \tau_{\beta+\delta_j}(x-u) \right) |_{u=0} \right) = 0$$

e quindi

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(\delta_j, \alpha+\beta)\chi(j)$$

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} S_k(2y^{(j)})\, S_{k-1+(\delta_j|\alpha-\beta)}\left(-\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial u_l^{(j)}}\right) e^{\sum_{h=1}^{n} \sum_{l=1}^{\infty} y_l^{(h)} \frac{\partial}{\partial u_l^{(h)}}} \right) \tau_{\alpha-\delta_j}(x+u)\, \tau_{\beta+\delta_j}(x-u) \right) |_{u=0}$$

Nell'ultima formula scritta per le τ le y sono delle indeterminate. Sviluppando i prodotti si ottiene allora una equazione nelle τ per ogni monomio nelle y. In particolare nel caso $n = 4$, $\alpha = \delta_4$ e $\beta = \delta_1 - \delta_2 - \delta_3$ se si considera il termine noto ovvero il coefficiente di y^0 si ottiene che esistono tre costanti non nulle A_1, A_2, A_3 tali che

$$A_1 \tau_{\lambda_{42}} \tau_{\lambda_{13}} + A_2 \tau_{\lambda_{43}} \tau_{\lambda_{12}} + A_3 \tau_0 \tau_{\lambda_{43}+\lambda_{12}} = 0$$

Capitolo 3

Alcuni richiami sulle superfici di Riemann

Oltre a richiamare alcune definizioni e risultati relativi alla teoria delle superfici di Riemann in questo capitolo dimostrerò alcuni lemmi e fisserò alcune notazioni necessarie per poter applicare il formalismo sviluppato nei primi due capitoli allo studio della funzione θ. In particolare introdurrò una funzione η definita sulla Jacobiana di una superficie di Riemann e ne studierò alcune semplici proprietà, facendo vedere come è collegata con la funzione θ.

Data X una superficie di Riemann di genere g, Y un suo sottoinsieme chiuso ed L un fibrato lineare su X; indicherò con

$$\mathcal{O}(Y;L) = \frac{\{\sigma \in \Gamma(U;L) : \ Y \subset U, \ U \ aperto\}}{\sim}$$

dove $\sim$ è la classica relazione di equivalenza per i germi di funzioni; e con

$$\mathcal{O}_p(L) = \mathcal{O}(\{p\};L)$$

le spighe del fascio associato ad L.

Indicherò, inoltre, con $c : H^1(X;\mathcal{O}^*) \to \mathbb{Z}$ la classe di Chern, ferma restando l'identificazione di $H^1(X;\mathcal{O}^*)$ con i fibrati lineari su X.

Indicherò con $\wedge : H^1(X;\mathbb{Z}) \times H^1(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ il *cap product* ovvero: $\omega \wedge \sigma = \int_X \omega \wedge \sigma$, e sempre con $\wedge$ la sua estensione a $H^1(X;\mathbb{C}) \times H^1(X;\mathbb{C})$. Rispetto alle convenzioni usuali, una leggera variante sarà adottata relativamente all'applicazione esponenziale nella successione

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \stackrel{exp}{\to} \mathcal{O}^* \to 0$$

exp infatti sarà l'esponenziale semplice e non $e^{2\pi i}$. Il nucleo, che è $2\pi i\mathbb{Z}$ verrà identificato con $\mathbb{Z}$.

3.1 I fibrati L_g

Siano X ed L come nel paragrafo precedente, e sia $p \in X$. Sia U un intorno aperto di x, sia $z : U \to D_1 = \{|z| > 1\}$, una carta locale e sia $X_0 = X - \{p\}$. z fornisce così un isomorfismo tra H_- ed $\mathcal{O}_p$.

Definizione 3.1 *Sia $f \in H$, f sia definita in D^*_ε e sia $U_\infty = z^{-1}(D^*_\varepsilon)$. Supponiamo che sia $f \neq 0$ in D^*_ε, allora definisco L_f, dando il relativo elemento di $H^1(\{U_\infty; X_0\}; \mathcal{O}^*)$ nel seguente modo*

$$(L_f)_{\infty 0} = f \circ z^{-1} \in \Gamma(U_\infty \cap X_0, \mathcal{O}^*)$$

Osservazione 3.1 *Se $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} z^n H_-$, o se $f = e^h$ con $h \in H$, allora $\exists\varepsilon$ tale che $f \neq 0$ in D^*_ε: quindi si puó definire L_f*

Proposizione 3.1 *Sia $f \in H$ e supponiamo si possa definire L_f. Allora*

$$c(L_f) = \nu(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}f}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon^{-1}} \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z.$$

Dimostrazione: Sia $U_\varepsilon = z^{-1}(D_\varepsilon)$ e sia f definita in $U_\varepsilon \setminus \{p\}$. Posto $U_0 = X_0 \setminus U_{\varepsilon/2}$ e $U_\infty = U_\varepsilon$, L_f è definito da

$$L_{\infty 0} = f \in \Gamma(U_\infty \cap U_0, \mathcal{O}^*)$$

Siano

- $r_0 : U_0 \to \mathbb{R}^+ \quad r_0 \equiv 1$
- $r_\infty : U_\infty \to \mathbb{R}^+ \quad r_\infty = |f|^2$ in $U_0 \cap U_\infty$ e sia r_∞ di classe C^∞

Poichè $\delta = \frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\log r_i$ è ben definito e $c(L) = \int_X \delta$ (vedi per esempio Gunning [5]) si ha quindi

$$
\begin{aligned}
c(L) &= \int_X \delta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{U_\infty} \bar{\partial}\partial \log r_i = -\frac{1}{2\pi i}\int_{U_\infty} d\partial \log r_i = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\infty} \partial \log r_\infty \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\infty} \partial \log r_i = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\infty} \partial \log |f|^2 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_\infty} \frac{\mathrm{d}f}{f}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Proposizione 3.2

1. *$c\left(L_{e^f}\right) = 0, \forall f \in H$.*
2. *$L_{z^n} = -nP$*
3. *Se $f \in H_-$ allora L_{e^f} è il fibrato banale.*
4. *$L_{fg} = L_f \otimes L_g$.*
5. *Sia $L \in H^1\left(X; \mathcal{O}^*\right)$ e sia $c(L) = n$ allora $\exists f \in H_+ : L = L_{z^n e^f}$*

.

Dimostrazione: 1) e 4) sono banali
2) Sia U_∞ intorno di p. Sia $h_\infty = z^n$ definita su U_∞ e $h_0 = 1$ definita su X_0. Ora $h_\infty = \left(L_{z^n}\right)_{\infty 0} h_0$, quindi h definisce una sezione di L_{z^n} , e
div $(h) = -nP$.
3) $h_\infty = e^f$ é definito su tutto U_∞ e $h_0 = 1$ é definito su X_0. Si ha che $h_\infty = L_{e^f} h_0$, quindi h definisce una sezione olomorfa priva di zeri, quindi L_{e^f} è banale.
5)Per il punti 4) e 2) basta dimostrare il caso in cui è $n = 0$. Osservo che X_0 è una varietá affine, quindi L/X_0 è triviale . Allora $L = \{L_{\infty 0}\}$ con $L_{\infty 0} \in H^1\left(X_0 \cap U_\infty; \mathcal{O}^*\right)$. Ora sia $f = L_\infty \in H$, si ha $L = L_f$, e quindi $\nu(f) = 0$. Ma $\nu(f) = 0$ implica che $g = \log f$ è ben definito in $X_0 \cap U_\infty$. Sia $g = g_+ + g_-$, con $g_+ = \pi_+ g$, allora, per i punti 3) e 4):

$$L_{e^{g_+}} = L_{e^g} = L_f = L.$$

$\blacksquare$

3.2 Alcuni richiami sulla funzione θ

É utile, e a volte necessario, fissare un *marking* della superficie X. Sia $P_0; \alpha_1 \dots \alpha_g, \beta_1 \dots \beta_g$ marking di X, sia J la Jacobiana di X e sia $\Phi : X \to J$ la mappa di Abel di punto base P_0. Siano inoltre $a_1 \dots a_g, b_1 \dots b_g \in H^1(X, \mathbb{Z})$ la base duale di $\alpha_1 \dots \beta_g$ e χ la matrice associata a $\wedge$ rispetto a questa base. Scelgo inoltre una base $\varphi_1 \dots \varphi_g$ di $H^1(X, \mathcal{O})$. Sia $\Omega : \mathbb{Z}^{2g} \to \mathbb{C}^g$ la matrice associata a $\delta : H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O})$ rispetto a queste basi, e indico sempre con Ω l'immagine di Ω. Posso quindi identificare $H^1(X, \mathcal{O})$ con $\mathbb{C}^g$ e J con $\mathbb{C}^g/\Omega$. Queste scelte si possono fare in modo che risulti $\chi = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ e $\Omega = (I\,\Omega_2)$ e per il teorema di Riemann si ha $\Omega_2 = {}^t\Omega$ e $Im\Omega_2 > 0$. Pongo inoltre: $\Omega_2 = (\omega_{i,i+g})$, $\varepsilon_i = \frac{1}{2}\omega_{i,i+g}$, $\varepsilon =^t (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_g) \in \mathbb{C}^g$ e $G = P\chi\,{}^t\bar{P} = \left(\overline{\Omega}_2 - \Omega_2\right)^{-1}$, dove $\left(\frac{P}{\bar{P}}\right) = \left({}^t\Omega\,{}^t\bar{\Omega}\right)^{-1}$

Definizione 3.2 *Per $x \in \mathbb{C}^g$:*

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i\,{}^tm\Omega_2 m + 2\pi i\,{}^tmx} \\ \theta[\nu](x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i({}^t\nu + {}^tm)\Omega_2(\nu+m) + 2\pi i({}^t\nu + {}^tm|2z)} \end{aligned}$$

per $\nu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$. Siano inoltre

$$\begin{aligned} \theta[0| - \tau - \varepsilon] &= \theta(x - \tau - \varepsilon) \\ \theta[\nu| - 2\tau - 2\varepsilon] &= \theta[\nu](x - \tau - \varepsilon) \end{aligned}$$

Piú che pensare θ associata al suo divisore Θ, la penseremo associata al fattore di automorfia.

Definizione 3.3 *Sia $\omega_i = {}^t(\omega_{1i} \dots \omega_{gi})$ e $\tau = {}^t(\tau_1 \dots \tau_g)$.*
Sia $\xi_\tau : \mathbb{C}^g \times \Omega\mathbb{Z}^{2g} \to \mathbb{C}$ il fattore di automorfia definito da

$$\xi_\tau(\omega_i; x) = \begin{cases} 1 & se\ i \le g \\ e^{2\pi i(\tau_{i-g} - x_{i-g})} & se\ i \ge g+1 \end{cases}$$

Si ha che $\theta[0|-\tau-\varepsilon]$ genera l'insieme delle funzioni relativamente automorfe a ξ_τ e che $\theta[\nu|-\tau-\varepsilon]$ genera lo spazio delle funzioni relativamente automorfe a ξ_τ^2. In particolare θ è associato a $\xi_{-\varepsilon}$ e $\theta[\nu]$ a $\xi_{-\varepsilon}^2$. Possiamo quindi definire

$$\Theta = \{x \in J : \theta(x) = 0\}, \; \Theta_\nu = \{x \in J : \theta[\nu](x) = 0\}.$$

Porró inoltre $\bar{\theta} = (\theta[\nu])$ con $\bar{\theta} : J \to \mathbb{C}P^{2^g-1}$. Tale mappa si dice mappa di Kummer.

Vale il seguente fondamentale teorema di Lefchetz (vedi Mumford).

Teorema 3.1 *Sia $\tilde{J} = \bar{\theta}(J)$ allora $\bar{\theta} : J \to \tilde{J}$ è una mappa 2 a 1*

Sará inoltre utile la seguente identitá:

Proposizione 3.3

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^g \;\; \theta(x+y)\theta(x-y) \; = \sum_{a,b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} \theta[\nu](x)\theta[\nu](y)$$

Dimostrazione:

$$\theta(x+y)\theta(x-y) \; = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i({}^t a\Omega_2 a + {}^t b\Omega_2 b) + 2\pi i((a+b|x)+(a-b|y))}$$

$$\sum_{\nu \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} \theta[\nu](x)\theta[\nu](y) \; =$$

$$\sum_{\nu \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i({}^t(n+\nu)\Omega_2(n+\nu) + {}^t(m+\nu)\Omega_2(m+\nu) + (2n+2\nu|x) + (2m+2\nu|y))}$$

L'applicazione $a = n+m+2\nu$, $b = n-m$ tra i due insiemi $\mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$ e $\mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g$ è una bigezione. La tesi segue dunque dall'identità

$$2\,{}^t(n+\nu)\Omega_2(n+\nu) + 2\,{}^t(m+\nu)\Omega_2(m+\nu) \; = \; 2\,{}^t(\frac{a+b}{2})\Omega_2(\frac{a+b}{2}) + 2\,{}^t(\frac{a-b}{2})\Omega_2(\frac{a-b}{2}) \; =$$

$$= {}^t a\Omega_2 a + {}^t b\Omega_2 b$$

$\blacksquare$

3.3 La funzione η

Definizione 3.4 *Sia* $h : H^1(X,\mathcal{O}) \times H^1(X,\mathcal{O}) \to \mathbb{C}$ *l'unica forma hermitiana tale che* $\forall a, b \in H^1(X,\mathbb{Z})$ *si ha*

$$\frac{h(\delta(a),\delta(b)) - h(\delta(b),\delta(a))}{2i} \;=\; ImH(\delta(a),\delta(b)) \;=\; a \wedge b$$

dove ricordo che $\delta : H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O})$*.*

Osservazione 3.2 *Sia* H *la matrice associata a* h *rispetto alla base scelta con* ${}^t\bar{H} = H$*. Abbiamo* $H = 2i\bar{G} = -2iG = (Im\Omega_2)^{-1}$ *e*

1. *e* $Imh\,(\Omega_n;\Omega_m) \;=\; {}^tn\chi m \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}^{2g}$
2. *e* $h(x;y) \;=\; {}^t\bar{x}By \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^g$*.*

Definizione 3.5 *Sia* $\eta : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ *così definita*

$$\eta(x) \;=\; \sum_{n,m\in\mathbb{Z}^g} (-1)^{\,{}^tnm} e^{-\frac{1}{2}\pi i\, h(n+\Omega_2 m;n+\Omega_2 m+2x)}$$

Sia $\forall\omega \in \Omega$*,* $\omega = n + \Omega_2 m$*,* $q(\omega) = {}^tnm$*, si pone*

$$\zeta(x;\omega) \;=\; (-1)^{q(\omega)} e^{\frac{1}{2}\pi\, h(\omega;\omega+2x)}.$$

Lemma 3.1

1. ζ *è fattore di automorfismo.*
2. η *è ben definita.*
3. η *è funzione relativamente automorfa per* ζ*.*

Dimostrazione: 1) è una verifica elementare
2) basta osservare che $Im\Omega_2 > 0$ e che quindi lo è anche H. Sia allora ${}^t\bar{\omega}H\omega \geq \alpha|\omega|^2$ con $\alpha > 0$. La convergenza della serie deriva dalla stima

$$\left| e^{-\pi/2\,{}^t\bar{\omega}H\omega} \right| \leq e^{-\pi/2\,\alpha|\omega|^2}$$

. 3) bisogna verificare che $\eta(x+\omega) \;=\; \zeta(x,\omega)\eta(x)$, ed anche questo è un conto elementare.

■

I motivi che rendono conveniente l'introduzione della funzione η dipendono dalle sue proprietá algebriche che sintetizzo nel seguente lemma:

Lemma 3.2

$$\forall x \in \mathbb{C}^g \, \forall \omega \in \Omega \quad \eta(0)\eta(x+\omega) \;=\; \eta(x)\eta(\omega)e^{\pi h(\omega,x)}.$$

Dimostrazione:

$\eta(x+\omega) = \eta(x)\zeta(x,\omega)$, quindi basta dimostrare $\eta(0)\zeta(x,\omega) \;=\; \eta(\omega)e^{\pi h(\omega,x)}$. Ma $\eta(\omega) = \eta(0)\zeta(0,\omega)$, quindi basta dimostrare $\zeta(x,\omega) \;=\; \zeta(0;\omega)e^{\pi h(\omega,x)}$. In effetti

$$\zeta(x,\omega) \;=\; (-1)^{q(\omega)}e^{\pi/2\, h(\omega,\omega+2x)} \;=\; (-1)^{q(\omega)}e^{\pi/2\, h(\omega,\omega)} \;=\; \zeta(0,\omega)e^{\pi h(\omega,x)}$$

■

Per studiare η faró uso dell'approccio classico allo studio dei fattori di automorfia, cosícome si puó trovare in Gunning, Riemann surfaces and generalized Theta functions ([7]).

Osservazione 3.3 *É immediato verificare che $\chi(\zeta) = \chi = \chi(\xi_{-\varepsilon})$. Ció dimostra che η è l'unica funzione relativamente automorfa a ζ e che ζ e $\xi_{-\varepsilon}$ differiscono per un fattore di automorfia piatto. Questa osservazione permette di dimostrare il seguente lemma che attraverso la formula 1 caratterizza la funzione η.*

Lemma 3.3 *Sia $C = \eta(0) \neq 0$, sia $\tilde{\eta} : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ e sia $\tilde{C} \in \mathbb{C}$ tale che*

$$\forall \omega \in \Omega \quad \forall x \in \mathbb{C}^g \quad \tilde{\eta}(x+\omega) \;=\; \tilde{C}\tilde{\eta}(x)\tilde{\eta}(\omega)\, e^{\pi h(\omega,x)}.$$

Allora

$$\exists \alpha : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C},\, \mathbb{C}-\text{lineare}\; \exists \beta \in \mathbb{C}^g, A \in \mathbb{C} \;:\; \tilde{\eta}(x) \;=\; Ae^{\alpha(x)}\eta(x-\beta).$$

Dimostrazione: Sia $f(x) = \dfrac{\tilde{C}\tilde{\eta}(x)}{C\eta(x)}$. Si ha che $f(x+\omega) = f(x)f(\omega)$ per ogni $\omega \in \Omega$, quindi $f_{|\Omega} : \Omega \to \mathbb{C}^g$ è omomorfismo di gruppi. Sia allora $f(\omega) = e^{\gamma(\omega)}$

con $\gamma : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$lineare, $\gamma(x) = \alpha(x) - \pi H(x;\beta)$, con $\alpha : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}-$lineare e $\beta \in \mathbb{C}^g$.
Pongo $g(x) = e^{-\alpha(x)\frac{\tilde{\eta}(x+\omega)}{\eta(x)}}$ e osservo che $g(x+\omega) = g(x)$ per ogni $\omega \in \Omega$ e quindi che $e^{-\alpha(x+\omega)}\tilde{\eta}(x+\beta+\omega) = \zeta(x;\omega)e^{-\alpha(x)}\tilde{\eta}(x+\beta)$. Infine osservando che η è l'unica (a meno di costanti) funzione automorfa relativamente a ζ si ha la tesi ■

Vediamo infine come sono collegate η e θ. Abbiamo giá osservato che differiscono per un fattore di automorfia piatto. Pongo allora

$$\varphi(x,\omega) = \zeta(x,\omega)\xi_{-\varepsilon}^{-1}(x,\omega)$$

e osservo che $\varphi(x,\omega) = e^{2\pi\, i(x|\Lambda\delta_i)}e^{2\pi\, i\sigma}$ con $\Lambda = -g\bar{\Omega}+(0;I)$ e $\delta_i = (0\dots 1\dots 0)$ e $\sigma_i = -\frac{1}{2}\,{}^t\bar{\omega}_i G\omega$ per $i \leq g$ mentre $\sigma_i = -\frac{1}{2}\,{}^t\bar{\omega}_i G\omega + \varepsilon_{i-g}$ per $4i \geq g+1$.
Voglio risolvere $\varphi(x;\omega) = h(x+\omega)e^{2\pi\, i\tilde{\sigma}}h(x)^{-1}$ con $h(x) = e^{2\pi\, i\,{}^t xAx + {}^t bx}$.
Otteniamo una soluzione con $A = -G/2$, $b = 0$ e $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i -^t \omega_i A\omega_i = \sigma_i + 1/2\,{}^t\omega_i G\omega_i$. Ovvero per $i \leq g$, poichè $\bar{\omega}_i = \omega_i$

$$\tilde{\sigma}_i \;=\; -\frac{1}{2}\,{}^t\bar{\omega}_i G\omega_i \;+\; \frac{1}{2}^t\bar{\omega}_i G\omega_i \;=\; 0$$

mentre per $i \geq g+1$

$$\tilde{\sigma}_i = -\frac{1}{2}\left({}^t\bar{\omega}_i -^T \omega_i\right)G\omega_i + \varepsilon_{i-g} = i\,{}^t\delta_i \begin{pmatrix} 0 \\ Im\Omega_2 \end{pmatrix} \left(\frac{-i}{2}\left(Im\Omega_2\right)^{-1}\right)\Omega\delta_i + \frac{1}{2}\omega_{i,i-g} = 0.$$

Abbiamo quindi la seguente proposizione

Proposizione 3.4

1. *$\xi_{-\varepsilon} \sim \zeta$ e l'equivalenza è data dalla forma $h(x) = e^{-\pi\, i\,{}^t xGx}$.*
2. *$\eta(x) = Ce^{-\pi\, i\,{}^t xGx}\theta(x)$.*

Capitolo 4

La costruzione di Krichever nel caso di n punti

In questo capitolo generalizziamo la costruzione che fanno Segal e Wilson (Loop groups and equations of KdV type, [9]) al caso di n punti. Il nome è dovuto al fatto che nel caso $n = 1$ la costruzione serve a ricondurre al formalismo grassmanniano la ricostruzione di soluzioni delle equazioni KdV associate a una superficie di Riemann più altri dati fatto da Krichever in modo più diretto.

Ad un dato costituito da una superficie di Riemann X, un line bundle L di grado $g-1$ su X, n punti $P_1, \ldots, P_n$ di X, $z_1, \ldots, z_n$ coordinate locali attorno a $P_1, \ldots, P_n$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ trivializzazione di L attorno ai punti $P_1, \ldots, P_n$ compatibili con $z_1, \ldots, z_n$, associeremo un elemento W della nostra Grassmanniana.

Vedremo inoltre come all'azione di $\Gamma_+^{(n)}$ e di Λ su Gr corrisponde in modo naturale un azione sul nostro dato.

Vedremo infine come la funzione τ_W sia collegata alla funzione θ definita sullo Jacobiano della nostra superficie di Riemann X.

4.1 La costruzione di Krichever

Sia X una superficie di Riemann. Sia L un line bundle su X di grado $g-1$ e siano $P_1, \ldots, P_n \in X$.
Siano $U_1, \ldots, U_n$ intorni aperti di $P_1, \ldots, P_n$ e sia $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j = \emptyset$ per $i \neq j$.

Siano $X_1 \subset U_1, \ldots, X_n \subset U_n$ intorni chiusi di $P_1, \ldots, P_n$ e sia $z_i : U_i \to \mathbf{S}^2$ una carta locale e sia $z_i : X_i \to D_\infty = \overline{D}_1 = \{|z| \geq 1\}$.

Definisco $X_{i\varepsilon} = z_i^{-1}(\overline{D}_\varepsilon)$ e $U_{i\varepsilon} = z_i^{-1}(D_\varepsilon)$.

Sia $C_{i\varepsilon} = \partial D_{i\varepsilon} = z_i^{-1}(\partial \overline{D}_\varepsilon)$. Sia $X_0 = X \setminus \cup P_i$ e $X_{0\varepsilon} = X \setminus \cup \overset{\circ}{X}_{i\varepsilon}$

Siano inoltre $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ trivializzazioni di L in $U_1, \ldots, U_n$ cioé $\varphi_i : L \to X_i \times \mathbf{C}$ e sia $\varphi_i = (\pi, \phi_i)$ dove $\pi : L \to X$ è la proiezione e ϕ_{iP} è lineare $\forall P \in L|_{X_i}$.

Definizione 4.1 *$\mathcal{D}$ è l'insieme dei dati $X; L; P_1, \ldots, P_n; z_1, \ldots, z_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ descritti sopra.*

Definisco $W : \mathcal{D} \to Gr$ nel seguente modo. Sia $f \in \mathbf{H}$ definita in D_ε^*

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \in W(X; L; P_1, \ldots, P_n; z_1, \ldots, z_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

se e solo se esiste una funzione $g \in \Gamma(X_{0\varepsilon}; L)$ tale che $g|_{C_i\varepsilon} = \varphi_i^{-1}(Id; f_i \circ z_i)$ ovvero $\phi_i(g|_{C_{i\varepsilon}}) = f_i \circ z_i$.

La definizione ha senso grazie alla seguente

Proposizione 4.1

$$W(X, L, P_1, ..., P_n, z_1, ..., z_n, \varphi_1, ..., \varphi_n) \in Gr$$

.

Dimostrazione: $\forall \varepsilon > 0$ abbiamo la seguente successione di Mayer-Vietoris dove $U_{0\varepsilon}$ è un intorno "piccolo" di $X_{0\varepsilon}$, $U_{0\varepsilon} = \dot{X}_{0\frac{\varepsilon}{2}}$

$$0 \to H^0(X, L) \to H^0(X_0, L) \oplus H^0(U_{1\varepsilon}, L) \oplus ... \oplus H^0(U_{n\varepsilon}, L) \xrightarrow{P}$$

$$\xrightarrow{P} H^0(X_0 \cap U_{1\varepsilon}, L) \oplus ... \oplus H^0(X_0 \cap U_{n\varepsilon}, L) \to H^1(X, L) \to 0$$

infatti $H^2(U_{0\varepsilon}, L) = H^2(U_{i\varepsilon}, L) = 0$.

Notiamo inoltre che $P_\varepsilon(\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_n) = (\sigma_0 - \sigma_1, ...\sigma_0 - \sigma_n)$ e P_ε è ovviamente Fredholm.

Osservo che

$$H^0(U_{i\varepsilon}, L) \cong \Gamma(D_\varepsilon) \quad H^0(X_0 \cap U_{i\varepsilon}, L) \cong \Gamma(D_\varepsilon^*) \quad H^0(X_0, L) \cong W$$

e l'isomorfismo è dato in entrambi i casi da $\sigma \mapsto \phi_i \circ \sigma \circ z_i^{-1}$. Quindi per $\varepsilon \to 0$ abbiamo$H^0(U_{i\varepsilon}, L) \to H_-^{(n)}$ $H^0(X_0 \cap U_{i\varepsilon}, L) \to H^{(n)}$.

Quindi abbiamo

$$0 \to H^0(X, L) \to W \oplus H_-^{(n)} \xrightarrow{P} H^{(n)} \to H^1(X, L) \to 0$$

e P è Fredholm. Ottengo quindi, poiché la mappa da $H_-^{(n)}$ in $H^{(n)}$ è l'immersione (o - l'immersione, a seconda della costruzione di Mayer-Vietoris fatta), la seguente successione esatta

$$0 \to H^0(X, L) \to W \xrightarrow{\pi_+} H_+^{(n)} \to H^1(X, L) \to 0$$

e π_+ è Fredholm.

Infine $indice(\pi_+) = dimH^0(X, L) - dimH^1(X, L) = 1 - g + c(L) = 0$. ∎

Osservazione 4.1 *Notiamo che, come osservato nel corso della dimostrazione del teorema,* $W(X, L, P_i, z_i, \varphi_i) \cong H^0(X_0, L)$.

4.2 L'azione di Λ e $\Gamma_+^{(n)}$ sulla Jacobiana

L'azione dei gruppi Λ e $\Gamma_+^{(n)}$ sulla grassmanniana corrisponde ad una azione degli stessi gruppi su $\mathcal{D}$.

Definizione 4.2 *Siano* $f = (f_1 \dots f_n) \in H_+^{(n)}$ *e* $\lambda \in \Lambda$ *definisco*

$$L_{f,\lambda} = L^1_{z^{\lambda_1} e^{f_1}} \otimes \dots \otimes L^n_{z^{\lambda_n} e^{f_n}}$$

dove $L^i_{z^{\lambda_i} e^{f_i}}$ *è il line bundle costruito come nel capitolo 3 attorno al punto* P_i.

Lemma 4.1 $\forall f \in H_+^{(n)}$ *e* $\forall \lambda \in \Lambda$ *si ha*

1. $c(L_{\lambda,f}) = 0$
2. $L_{\lambda,f} = L_f \otimes \mathcal{O}(-\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i)$
3. $L_{\lambda_1+\lambda_2, f_1+f_2} = L_{\lambda_1,f_1} \otimes L_{\lambda_2,f_2}$

Dimostrazione: Segue dalla proposizione 3.2.

∎

Quindi l'applicazione $L : \Lambda \otimes H_+ \mapsto J = Pic^0$ che abbiamo definito è un omomorfismo di gruppi surgettivo.

Osservazione 4.2 *Alla costruzione di $L_{\lambda,f}$ corrisponde una trivializzazione $\varphi_1^{\lambda,f} \dots \varphi_n^{\lambda,f}$ di $L_{\lambda,f}$ tale che dati $\sigma_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O})$: i σ_i definiscono un elemento $\sigma \in \Gamma(X, L_{\lambda,f})$ mediante $\sigma_i \circ z_i = \phi_i^{\lambda,f} \circ \sigma$ se e solo se $\sigma_i = z^{\lambda_i} e^{f_i} \sigma_0$*

Proposizione 4.2 *Sia $(X, L, P_i, z_i, \varphi_i) \in \mathcal{D}$. Allora*

$$z^\lambda e^f W(X, L, P_i, z_i, \varphi_i) = W(X, L \otimes L_{\lambda,f}, P_i, z_i, \varphi_i \otimes \varphi_i^{\lambda,f})$$

Dimostrazione:

Sia $W_1 = W(X, L, P_i, z_i, \varphi_i)$ e $W_2 = W(X, L \otimes L_{\lambda,f}, P_i, z_i, \varphi_i \otimes \varphi_i^{\lambda,f})$.

La trivializzazione φ_i di l definisce un elemento $\{L_{i0}\} \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ con $L_{i0} \in \Gamma(X_i \cap X_0, \mathcal{O}^*)$ e $L_{i0} = \phi_i \circ \phi_0^{-1}$. Sia ora $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i \otimes \varphi_i^{\lambda,f}$ trivializzazione di $L \otimes L_{\lambda,f} = L'$. Il corrispettivo elemento di $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ è dato da $L'_{i0} = L_{i0} e^{f_i} z^{\lambda_i}$.

Sia ora $g \in W_1$ e sia $g_i \circ z_i = \phi_i \circ \sigma$ con $\sigma \in \Gamma(X_0, L)$.

$\tilde{\sigma} = \tilde{\varphi}_0^{-1} \circ \varphi_0 \circ \sigma$ definisce una sezione di $\Gamma(X_0, L')$ e $\tilde{\phi}_i \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\phi}_i \tilde{\phi}_0^{-1} \circ \sigma = L'_{i0} \circ \phi_0 \circ \sigma = (e^{f_i} z^{\lambda_i} g_i) \circ z_i$ e quindi $e^f z^\lambda g \in W_2$

Analogamente si dimostra il viceversa

■

Osservazione 4.3 *L'azione di $H_+^{(n)}$ su J (ovvero la funzione $L : H_+^{(n)} \mapsto J$) si può sollevare ad una funzione $Z : H_+^{(n)} \mapsto H^1(X, \mathcal{O})$ nel seguente modo. Dato $f \in H_+^{(n)}$ definisco*

$$\{Z_{i0}\} \in H^1(X, \mathcal{O}) \qquad \textit{con} \quad Z_{i0} = f_i \circ z_i$$

Non esiste invece una costruzione altrettanto naturale per sollevare la parte in λ di L. Una volta operata delle scelte come nel paragrafo 2 del capitolo 3 e definita $\tilde{\Phi} : \tilde{X} \mapsto J = \mathbb{C}^g$ la mappa di Abel, possiamo naturalmente definire $Z_\lambda = -2\pi i(\lambda_1 \tilde{\Phi}(\tilde{P}_1) + \dots + \lambda_n \tilde{\Phi}(\tilde{P}_n))$; dove $\tilde{P}_1 \dots \tilde{P}_n$ son sollevati di $P_1 \dots P_n$ sul rivestimento universale $\tilde{X}$ di X.

Il $2\pi i$ dipende dal fatto che come abbiamo convenuto nel capitolo 3 nell'esponenziale tra i fasci $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}^*$ non abbiamo inserito il $2\pi i$. Supporrremo allora in seguito che $\tilde{\Phi} = 2\pi i \Phi$ in modo che risulti che l'immagine in $Pic^0 \cong J$ di $\tilde{\Phi}(P)$ sia il divisore P.

Osservazione 4.4 *Nei pargrafi successivi identificherò le sezioni con le loro trivializzazioni e scriverò per esempio* $g_i = \sigma|_{C_i}$ *per indicare* $g_i \circ z_i = \phi_i \circ \sigma|_{C_i}$.

Ometterò spesso anche di scrivere le funzioni Z *e* L, *e scriverò così* P *per intendere* $\tilde{\Phi}(P) \in \mathbb{C}^g$, *e* $\sum_i \lambda_i P_i$ *per intendere il divisore di grado* 0 $\sum_i \lambda_i P_i \in J$.

In accordo con le covenzioni introdotte da Segal e Wilson nel caso $n = 1$ *sciverò, quando non ci saranno equivoci* $\tau(f)$ *per intedere* $\tau(e^f)$.

Una volta chiarite le definizioni e mostrato come si può agire formalmente mi sembra infatti che continuare a mantenere quel formalismo renda troppo pesante e meno immediata la lettura delle formule.

4.3 La funzione τ e la funzione θ

In questo paragrafo Z e L indicheranno le loro restrizioni a $H_+^{(n)}$

Definizione 4.3 *Siano:*

$$\begin{aligned} K_0 &= Ker\, Z \\ K &= Ker\, L \\ V &= z^{-1} H_-^{(n)} \end{aligned}$$

Lemma 4.2

1. K_0 *è* $\mathbb{C}$*-sottospazio vettoriale di* $H_+^{(n)}$
2. K *è sottogruppo con il* $+$ *di* $H_+^{(n)}$
3. $K_0 = \{f \in H_+^{(n)} : \exists \sigma \in \Gamma(X_0, \mathcal{O}) \quad e \quad f_\infty^{(i)} \in \Gamma(X_i) = \Gamma(D_\infty) \quad f_i = f_0 + f_\infty^{(i)}\}$
4. $K = \{f \in H_+^{(n)} : \exists \varphi \in \Gamma(X_0, \mathcal{O}^*) \quad e \quad f_\infty^{(i)} \in \Gamma(X_i) \quad e^{f_i} = \varphi e^{f_\infty^{(i)}}\}$

Dimostrazione: 1) basta osservare che Z è $\mathbb{C}$-lineare su K_0.
2)basta ossevare che L è un omomorfismo di gruppi
3)$f \in K_0 \Leftrightarrow Z_f \in B^1(X, \mathcal{O})$ ovvero se e solo se esistono $g_i \in \Gamma(X_i, \mathcal{O})$ per $i = 0 \dots n$ e $f_i = f_{i0} = g_i - g_0$.
4)è analogo al punto 3 ∎

Osservazione 4.5 *Per $f \in K$ si ha che $f_\infty - f_\infty(\infty) \in V$ è univocamente determinato.*

Infatti, dato $f \in K$ e $e^{f_i} = \varphi e^{f_\infty^{(i)}} = \psi e^{g_\infty^{(i)}}$ con $\varphi, \psi \in \Gamma(X_0, \mathcal{O}^*)$; osservo che $\varphi\psi^{-1} = e^{-f_\infty^{(i)} + g_\infty^{(i)}}$ e quindi che $\varphi\psi^{-1}$ definisce un elemento di $\Gamma(X, \mathcal{O}^*)$. Abbiamo allora $\varphi\psi^{-1} = e^{-f_\infty^{(i)} + g_\infty^{(i)}} = c_1 \in \mathbb{C}$ e quindi che $f_\infty^{(i)} - g_\infty^{(i)} = c = f_\infty^{(i)}(\infty) - g_\infty^{(i)}(\infty)$ da cui $f_\infty - f_\infty(\infty) = g_\infty - g_\infty(\infty)$.

Definisco allora $a : H_+^{(n)} \mapsto V$ con $a(f) = f_\infty - f_\infty(\infty)$.
Osservo che

1. *$a : K_0 \mapsto V$ è $\mathbb{C}$-lineare*

2. *$a : K \mapsto V$ è omomorfismo di gruppi*

Lemma 4.3
K costituisce un insieme di generatori per $H_+^{(n)}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Dimostrazione: Sia $f \in H_+^{(n)}$. Esistono $\lambda_1 \dots \lambda_{2g} \in \mathbb{R}$ e $v_1 \dots v_{2g} \in H^1(X, \mathbb{Z})$ tali che $Z(f) = \sum_i \lambda_i v_i$. Sia $v_i = Z(k_i)$ con $k_i \in K$ (ricordo che Z è bigettiva e che $K = Z^{-1}(H^1(\mathbb{Z})))$ e osservo che $f - \sum_i \lambda_i v_i \in K_0$ e quindi che $f = \sum_i \lambda_i k_i + k_0$. ■

Osservazione 4.6 *Quindi posso estendere la funzione a in un modo unico ad una funzione $\mathbb{R}$-lineare definita su tutto $H_+^{(n)}$. Indicherò nel seguito sempre con a questa estensione.*

Osservazione 4.7 *Abbiamo il seguente diagramma commutativo di gruppi abeliani con righe e colonne esatte*

quindi $Im\,\Sigma_1 \cong Ker\,\Sigma_2 \cong Im\,\Sigma_3$

$e\ Im\,\Sigma_1 \cong H^1(X,\mathbb{Z}) \qquad e\ Im\,\Sigma_3 \cong \frac{K}{K_0} \qquad da\ cui\ H^1(X,\mathbb{Z}) \cong \frac{K}{K_0}.$

Sarà però utile mostrare esplicitamente un isomorfismo tra i due gruppi. Per fare ciò ho bisogno di reintrodurre il marking $P_0; (\alpha_1 \dots \beta_g) = (\gamma_1 \dots \gamma_{2g})$ di X e gli elementi $(a_1 \dots b_g) = (\gamma_1^* \dots \gamma_{2g}^*) \in H^1(X,\mathbb{Z})$ così come ho fatto nel paragrafo 2 del capitolo 3.

Inoltre rappresentiamo X come $\frac{Y}{\sim}$ dove Y è un sottoinsieme connesso di $\tilde{X}$ (il rivestimento universale di X) e $\pi : \mathring{Y} \mapsto X - \bigcup \gamma_i$ è un isomorfismo

Siano quindi $\tilde{\alpha}_i$ le sollevate delle α_i e $\Delta = \partial Y = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 \tilde{\alpha}_1^{-1} \dots \tilde{\beta}_g^{-1}$ e $\pi(Q_i) = P_i$ e $\pi(Y_i) = X_i$.

Sia ora $f \in K$ e sia $e^f = \varphi e^{f_\infty}$ e $f_0 = f - f_\infty$. Osservo che $\varphi = e^{f_0^{(i)}}$ in C_i e che φ è definita su tutto Y_0 e che per $i = 1 \dots n$ si ha che $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i} \frac{d\varphi}{\varphi} = 0$. Quindi $log\varphi$ è definito su tutto Y_0 ed in particolare f_0 è definito su tutto Y_0.

Si ricava immediatamente che:

1. $f_0^{(i)} - f_0^{(j)} = 2\pi i n_{ij} \quad$ con $n_{ij} \in \mathbb{Z}$

2. Sia $\gamma = \gamma_i$ per qualche i e sia γ^+ la curva asssociata a γ che percorre ∂Y in senso antiorario, e γ^- quella in senso orario; allora

$f_0^{(i)}(\gamma^-(t)) - f_0^{(i)}(\gamma^+(t)) = 2\pi i n_i(f,\gamma)$ e $n_i(f,\gamma) \in \mathbb{Z}$.

3. $n_i(f,\gamma) = n_j(f,\gamma) = n(f,\gamma)$

4. $n(f,\gamma)$ non dipende dalla scelte di f_∞ e φ e si può porre anche $f_0 = f - a(f)$.

5. $2\pi i\, n(f,\alpha_i) = \int_{\beta_i} df_0$

6. $2\pi i\, n(f,\beta_i) = \int_{\alpha^{-1}} df_0 = -\int_{\alpha_i} df_0$

Definisco allora l'isomorfismo tra $\frac{K}{K_0}$ e $H^1(X,\mathbb{Z})$ nel seguente modo:

$$[\,]: \frac{K}{K_0} \mapsto H^1(X,\mathbb{Z}) \qquad [f] = \sum_{i=1}^{2n} n(k,\gamma_i)\gamma_i^* \qquad per f \in K$$

Il legame tra la funzione θ e la funzione τ si basa sul seguente

Lemma 4.4 $\forall k,l \in K$

$$S(k,a(l)) - S(l,a(k)) = S(k,l_\infty) - S(l,k_\infty) = 2\pi i [l] \wedge [k]$$

comunque si scelgano l_∞ e k_∞ compatibili con l e k.

Dimostrazione: La prima uguaglianza è evidente dimostro quindi la seconda.

$$S(k,l_\infty) - S(l,k_\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z^{-1}|=\varepsilon} < l'_\infty, k > - < k'_\infty, l > dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z^{-1}|=\varepsilon} < k'_0, l_0 > + < k, l' > + < k'_\infty, l_\infty > dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z^{-1}|=\varepsilon} < k'_0, l_0 > dz$$

infatti:

- $\int < k, l' > dz = 0$ perché $k,l \in H_+^{(n)}$
- $\int < l_\infty, k'_\infty > dz = 0$ perché $k'_\infty \in z^{-2}H_-^{(n)}$ e $l_\infty \in H_-^{(n)}$

Osservo inoltre che

$$\int_{C_j} k_0^{(j)\prime} l_0^{(j)} = \int_{C_j} k_0^{(i)\prime} l_0^{(i)} \ + 2\pi i n_{ij} \int_{C_j} k_0^{(i)\prime} = \int_{C_j} k_0^{(i)\prime} l_0^{(i)}$$

e quindi che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z^{-1}|=\varepsilon} < k_0', l_0 > dz = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} k_0^{(j)\prime} l_0^{(j)} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} k_0^{(1)\prime} l_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} k_0^{(1)\prime} l_0^{(1)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{g} \int_{\alpha_h} k_0^{(1)\prime} l_0^{(1)} \ + \int_{\beta_h} k_0^{(1)\prime} l_0^{(1)} \ + \int_{\alpha_h^{-1}} k_0^{(1)\prime} l_0^{(1)} \ + \int_{\beta_h^{-1}} k_0^{(1)\prime} l_0^{(1)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{g} \int_{\alpha_h} k_0^{(1)\prime} l_0^{(1)} - \int_{\alpha_h} k_0^{(1)\prime} (l_0^{(1)} + 2\pi i n(\alpha_h, l)) + \int_{\beta_h} k_0^{(1)\prime} l_0^{(1)} - \int_{\beta_h} k_0^{(1)\prime} (l_0^{(1)} + 2\pi i n(\beta_h, l)) \ =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{g} -2\pi i n(\alpha_h, l) \int_{\alpha_h} k_0^{(1)\prime} - 2\pi i n(\beta_h, l) \int_{\beta_h} k_0^{(1)\prime} =$$

$$2\pi i \sum_{h=1}^{g} n(\alpha_h, l) n(\beta_h, k) - n(\alpha_h, k) n(\beta_h, l) = 2\pi i [l] \wedge [k]$$

■

Sia ora $a = b + c$ con b $\mathbb{C}$-lineare e c $\mathbb{C}$-antilineare. Si ha il seguente

Corollario 4.1

1. $\forall l, k \in K \qquad S(k, a(l)) - S(l, a(k)) \in 2\pi\mathbb{Z}$
2. $\forall f, g \in H_+^{(n)} \qquad S(f, a(g)) - S(g, a(f)) \in i\mathbb{R}$
3. $\forall f, g \in H_+^{(n)} \qquad S(f, b(g)) = S(g, b(f))$
4. $\forall f, g \in H_+^{(n)} \qquad S(f, c(g)) = \overline{S(g, c(f))}$

Dimostrazione: 1) È evidente dal lemma precedente.
2) Segue dal punto 1) e dalla $\mathbb{R}$-linearità di a
3)Sia $A(f,g) = S(f,a(g))$ e $B(f,g) = S(f,b(g))$.
Si ha che $B(f,g)-B(g,f) = \frac{1}{2}(A(f,g)-A(g,f))+\frac{1}{2}(A(ig,if)-A(if,ig)) \in i\mathbb{R} \quad \forall f,g \in H_+^{(n)}$ e poiché B è $\mathbb{C}$-bilineare segue che B è simmetrico.
4)Sia $C(f,g) = S(g,c(f))$; procedendo come nel punto 3) si ottiene $C(f,g)+C(g,f) \in \mathbb{R}$ e $C(f,g)-C(g,f) \in i\mathbb{R}\ \forall f,g \in V$ e quindi $C(f,g) = \overline{C(g,f)}$.
■

Sia ora h la forma Hermitiana definita nel capitolo 3.

Lemma 4.5 $\forall f,g \in H_+^{(n)}$

$$S(f,c(g)) = -\pi h(Z_g, Z_f)$$

Dimostrazione: Osservo che $C(g,f) = S(f,c(g))$ e $-\pi h(Z_g,Z_f)$ sono due forme hermitiane definite su $H_+^{(n)}$. Per verificare che sono uguali basta allora verificare che $Im\, C = Im\,(-\pi h)$ su $K \times K$.

$$Im\, C(g,f) = -\frac{1}{2i}(C(g,f)-C(f,g)) = -\frac{1}{2i}(S(f,a(g))-S(g,a(f))) =$$

$$= -\pi[g] \wedge [f] = Im - \pi h(Z_g, Z_f)$$

■

Posso ora studiare la relazione tra τ e θ . Affronterò prima il caso in cui L non sia un divisore speciale, ovvero in cui sia $H^0(X,L) = \{0\}$. Osservo infatti che $H^0(X,L) = \{0\} \Leftrightarrow H^0(X_0,L) \cap H_-^{(n)} = \{0\} \Leftrightarrow \sigma(W) \neq 0$. In questo caso posso quindi scegliere $\delta_W = \sigma(W)$.

Proposizione 4.3 *Sia $H^0(X,L) = \{0\}$. Allora $\forall f \in H_+^{(n)}$ e $\forall k \in K$ si ha:*

$$\tau_W(f+k) = \tau_W(f)\, \tau_W(k)\, e^{-S(f,a(k))}$$

Dimostrazione: Osservo che

- $\tau(f+k)\widehat{e^{-f}}\widehat{e^{-k}}\sigma(W) = \sigma(e^{-f}e^{-k}W)$
- $\varphi_k(W) = W$ e quindi $e^{-k}W = e^{-a(k)}W$

- Se $l \in H_-^{(n)}$ $\quad \widehat{e^l}\sigma(W) = \sigma(e^l W)$

da cui ricavo

$$\sigma(e^{-f}e^{-g}W) = \widehat{e^{-a(k)}}\sigma(e^{-f}W) = \tau(f)\,\widehat{e^{-a(k)}}\widehat{e^{-f}}\sigma(W) =$$
$$\tau(f)e^{-S(f,a(k))}\widehat{e^{-f}}\widehat{e^{-a(k)}}\sigma(W) = \tau(f)e^{-S(f,a(k))}\widehat{e^{-f}}\sigma(e^{-a(k)}W) =$$
$$= \tau(f)\tau(k)e^{-S(f,a(k))}\widehat{e^{-f}}\widehat{e^{-k}}\sigma(W)$$

La tesi si ottiene quindi dalla prima e dall'ultima uguaglianza osservando che $\sigma(W) \neq 0$. ■

Nel caso $H^0(X,L) = \{0\}$ poniamo allora

$$\tau_1(f) = \tau(f)e^{\frac{1}{2}S(f,b(k))}$$

e verifichiamo che

1. $\tau_1(f+k) = \tau_1(f)\,\tau_1(k)\,e^{-S(f,c(k))}$ per ogni $f \in H_+^{(n)}$ e $k \in K$
2. $\tau_1(f+k) = \tau_1(f)\,\tau_1(k)$ per ogni $f, k \in K_0$
3. $\exists \rho : H_+^{(n)} \mapsto \mathbb{C}$ $\quad\mathbb{C}$-lineare tale che $\tau_1(k) = e^{\rho(k)} \quad \forall k \in K_0$

pongo allora

$$\tau_2(f) = \tau_1(f)e^{-\rho(f)} = \tau(f)e^{\frac{1}{2}S(f,b(f))-\rho(f)}$$

ottenendo così che:

1. $\tau_2(f+k) = \tau_2(f) \quad \forall k \in K_0$ e$\forall f \in H_+^{(n)}$
2. $\tau_2(f+k) = \tau_2(f)\,\tau_2(k)\,e^{-S(f,c(k))} = \tau_2(f)\,\tau_2(k)\,e^{\pi h(k,f)}$per ogni $f \in H_+^{(n)}$ e $k \in K$
3. $\tau_2(0) \neq 0$

Quindi per il lemma 3 del capitolo 3 si ha

Teorema 4.1 *Se $H^0(X,L)=\{0\}$; allora*
$\exists C \in \mathbb{C}^*$ *e* $\exists \alpha_W : H_+^{(n)} \mapsto \mathbb{C}$ $\quad \mathbb{C}-lineare \quad e \quad \beta \in \mathbb{C}^g$ *tali che*

$$\tau_W(f) = C\ e^{\alpha_W(f)-\frac{1}{2}S(f,b(f))}\ \eta(f-\beta)$$

con $\beta = L - \frac{\kappa}{2}$ *e* $\frac{\kappa}{2}$ *un theta charatheristic.*

Dimostrazione: L'unica affermazione che devo dimostrare è quella relativa a β.
Osservo che $\tau_W(f) = 0 \Leftrightarrow \sigma(e^{-f}W) = 0 \Leftrightarrow H^0(L \otimes L_f) \neq \{0\} \Leftrightarrow f \in -W^{g-1} + L - (g-1)P_0$
e che $\eta(f-\beta) = 0 \Leftrightarrow f - \beta \in \Theta = -W^(g-1) + \frac{\kappa}{2} \Leftrightarrow f \in -W^{g-1} + \beta + \frac{\kappa}{2}$
quindi $-W^{g-1} + \beta + \frac{\kappa}{2} = -W^{g-1} + L - (g-1)P_0$ e letta su J $\beta = L - \frac{\kappa}{2}$. ■

Estendo ora il teorema al caso in cui $H^0(X,L) \neq \{0\}$
Esiste $g \in H_+^{(n)}$ tale che $H^0(X, L \otimes L_g) = \{0\}$ e quindi poiché $\sigma(e^g W) \neq 0$ posso porre $\delta_W^* = \widehat{e^{-g}}\sigma(e^g W)$; allora

$$\tau_W(f) = \frac{\sigma(e^{-f}W)}{\widehat{e^{-f}}\widehat{e^{-g}}\sigma(e^g W)} = \frac{\sigma(e^{-f-g}e^g W)}{\widehat{e^{-f-g}}\sigma(e^g W)} = \tau_{e^g W}(f+g) =$$

$$= C\ e^{\alpha_{e^g W}(g)+\frac{1}{2}S(g,b(g))}\ e^{\alpha_{e^g W}(f)+S(g,b(f))+\frac{1}{2}S(f,b(f))}\ \eta(f-\beta)$$

e quindi

Teorema 4.2

$$\tau_W(f) = C\ e^{\alpha_W(f)-\frac{1}{2}S(f,b(f))-\pi i\, {}^t f G f}\ \theta(f-\beta)$$

con $\beta = L - \frac{\kappa}{2}$.

4.4 Le funzioni τ_λ e la funzione θ

Operando come nell'ultima parte del paragrafo precedente si può ottenere la relazione tra le τ_λ e la funzione θ.

Sia $(X, L, P_i, z_i, \varphi_i) \in \mathcal{D}$ e W l'elemento della grassmanniana associato.

Osservo che l'insieme dei $g \in H_+^{(n)}$ tali che $\sigma(e^g W) \neq 0$ è un denso aperto di $H_+^{(n)}$. Quindi, poiché $H_+^{(n)}$ è uno spazio di Frechet l'insieme dei $g \in H_+^{(n)}$ tali che $\sigma(e^g z^\lambda W) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda$ è un denso di $H_+^{(n)}$. Scelgo uno di questi g e pongo $\delta_W = \widehat{e^{-g}} \sigma(e^g W)$.

Sia ora $\lambda \in \Lambda$; allora:

$$\tau_{W,\lambda}(f) = \frac{\sigma(e^{-f} z^{-\lambda} W)}{\widehat{e^{-f}} \widehat{z^{-\lambda}} \delta_W} = \frac{\sigma(e^{-f} e^{-g} e^g z^{-\lambda} W)}{\widehat{e^{-f}} \widehat{z^{-\lambda}} \widehat{e^{-g}} \sigma(e^g W)} =$$

$$= \frac{\sigma(e^{-f-g} e^g z^{-\lambda} W)}{\widehat{e^{-f-g}} \sigma(z^{-\lambda} e^g W)} \frac{\widehat{e^{-f-g}} \sigma(z^{-\lambda} e^g W)}{\widehat{e^{-f-g}} \widehat{z^{-\lambda}} \sigma(e^g W)} \sigma(e^{-f} e^{-g} e^g z^{-\lambda} W) = \tau_{z^{-\lambda} e^g W}(f+g) \tau_{e^g W}(z^\lambda)$$

Quindi

$$\tau_\lambda(f) = \tau_{e^g W}(z^\lambda) e^{\alpha_{z^{-\lambda} e^g W}(g) - \frac{1}{2} S(g, b(g))} e^{\alpha_{z^{-\lambda} e^g W}(f) - S(g, b(f)) - \frac{1}{2} S(f, b(f))} \eta(f - \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - \beta) =$$

$$C_\lambda e^{\alpha_0(f)} e^{\alpha_\lambda(f)} e^{-\frac{1}{2} S(f, b(f))} \eta(f - \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - \beta)$$

Per rendere piú chiare le formule suppongo che si possa scegliere $g = 0$, osservando che i ragionamenti che farò si possono adattare al caso più generale procedendo come sopra. Osservo inoltre che la scelta $g = 0$ si può effettuare per un denso di $Pic^{g-1}(X) = \{line \quad bundle \quad di \quad grado \quad g-1 \; su \; X\} \leftrightarrow J$ e questo sarà sufficiente per ricavare la formula trisecante.

Ho quindi che:

$$\begin{aligned}
C_\lambda &= \tau_W(z^{-\lambda}) \\
\alpha_\lambda(f) &= \alpha_{z^{-\lambda}}(f) \\
\tau_\lambda(f) &= C_\lambda e^{\alpha_\lambda(f) + \frac{1}{2} S(f, b(f))} \eta(f - \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - \beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_\lambda &= C_\lambda e^{g(\sum_i \lambda_i P_i + \beta, \sum_i \lambda_i P_i + \beta)} \\
\tilde{\alpha}_\lambda(f) &= \alpha_\lambda(f) - 2g(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i + \beta, f) \\
\tau_\lambda(f) &= \tilde{C}_\lambda e^{\tilde{\alpha}_\lambda(f) + \frac{1}{2} S(f, b(f)) + g(f,f)} \theta(f - \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - \beta)
\end{aligned}$$

dove $g(f,g) = -\pi i\, {}^t f G f \quad$ e $G = P\chi\, {}^t\bar{P}$ è la forma introdotta nel paragrafo 2 del capitolo 3. Osservo inoltre che i C_λ così definiti sono non nulli visto che $\sigma(z^\lambda W) \neq 0$.

Introduco la seguente estensione della funzione a:
Sia $Z : H_+^{(n)} \times \Lambda \mapsto H^1(X,\mathcal{O})$ e $Z(f,\lambda) = Z_f + Z_\lambda$
e sia $L : H_+^{(n)} \times \Lambda \mapsto H^1(X,\mathcal{O}^*)$ e $L(f,\lambda) = L_{\lambda,f}$.
Pongo $\tilde{K} = Ker\, L$ e $\tilde{K}_0 = Ker Z$.
Osservo che $(\lambda,k) \in K \Leftrightarrow \exists \varphi \in \Gamma(X_0,\mathcal{O}^*)$ e $f_\infty^{(i)} \in \Gamma(X_i,\mathcal{O})$ tali che $z^{\lambda_i} e^{f_i} = \varphi e^{f_\infty^{(i)}}$.
Definisco $a(\lambda,f) = f_\infty^{(i)} - f_\infty^{(i)}(0)$

Per ricavare le proprietà degli α_λ sarà utile la seguente generalizzazione della proposizione precedente

Proposizione 4.4 *Siano* $\mu,\lambda \in \Lambda$ *e* $k,f \in H_+^{(n)}$
Sia $a_\lambda : H_+^{(n)} \mapsto V$ *dato da* $a_\lambda(g) = a(\lambda,g)$
Sia $(\lambda,k) \in K$ *allora*

$$\tau_{\lambda+\mu}(k+f) = \varepsilon(\mu,\lambda) e^{-S(f,a_\lambda(k))}\, \tau_\mu(f)\tau_\lambda(k)$$

Dimostrazione:

$$\tau_{\lambda+\mu}(k+f)\, \widehat{z^{-\lambda-\mu}}\widehat{e^{-f-k}}\sigma(W) = \sigma(z^{-\lambda-\mu}e^{-f-k}W)$$

$$\tau_\lambda(k)\, \widehat{z^{-\lambda}}\widehat{e^{-k}}\sigma(W) = \sigma(z^{-\lambda}e^{-g}W) = \sigma(e^{-a_\lambda(k)}W) = \widehat{e^{a_\lambda(k)}}\sigma(W)$$

quindi

$$\sigma(z^{-\lambda-\mu}e^{-f-k}W) = \widehat{e^{a_\lambda(k)}}\sigma(e^{-f}z^{-\mu}W) = \tau_\mu(f)\, \widehat{e^{a_\lambda(k)}}\widehat{e^{-f}}\widehat{z^{-\mu}}\sigma(W) =$$

$$= \tau_\mu(f)\, e^{-S(f,a_\lambda(k))}\widehat{e^{-f}}\widehat{z^{-\mu}}\widehat{e^{a_\lambda(k)}}\sigma(W) = \tau_\mu(f)\tau_\lambda(k)e^{-S(f,a_\lambda(k))}\widehat{e^{-f}}\widehat{e^{-k}}\widehat{z^{-\mu}}\widehat{z^{-\lambda}}\sigma(W) =$$

$$= \varepsilon(\mu,\lambda)\tau_\mu(f)\tau_\lambda(k)e^{-S(f,a_\lambda(k))}\widehat{e^{-f}}\widehat{e^{-k}}\widehat{z^{-\mu-\lambda}}\sigma(W)$$

Dalla prima e dall'ultima formula si ricava la tesi osservando che $\sigma(W) \neq 0$
■

Capitolo 5

La formula trisecante

La relazione tra la funzione θ e la funzione τ, descritta nel capitolo precedente, unita alle equazioni di Hirota ricavate per la τ nel capitolo 2 permettono di ricavare delle formule per θ. Alcune di queste hanno un significato geometrico più evidente, e in particolare si può ricavare la formula trisecante nella sua interpretazione attraverso la mappa di Kummer.

5.1 Un'osservazione preliminare sugli α_λ

In questo capitolo supporremo sempre che sia $\sigma(z^\lambda W) \neq 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Ho mostrato nel capitolo precedente come si posa aggirare tale ipotesi; quando andrò ad interpretare le formule per θ tali ipotesi non risulterà comunque sia una limitazione.

Sia $\lambda, \mu \in \Lambda$ e sia $k \in H_+^{(n)}$ tale che $Z(\lambda, k) = 0$. Un tale k esiste perché come abbiamo visto $f \mapsto Z_f$ è surgettiva. Dall'ultima formula del capitolo precedente otteniamo allora

$$\tilde{C}_{\lambda+\mu}\, e^{\alpha_{\lambda+\mu}(f+k)}\, e^{-\frac{1}{2}S(f+k,b(f+k))}\eta(f - \sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i - \beta)) =$$

$$\varepsilon(\mu,\lambda)\tilde{C}_\lambda \tilde{C}_\mu e^{\alpha_\lambda(k)+\alpha_\mu(f)}\, e^{-S(f,a_\lambda(k))} e^{-\frac{1}{2}S(f,b(f))-\frac{1}{2}S(k,b(k))}\eta(-\beta)\eta(f - \sum_i P_i - \beta)$$

da cui

$$\alpha_{\lambda+\mu}(f) - S(f, b(k)) = \alpha_\mu(f) - S(f, a_\lambda(k))$$

Se ora pongo $\mu = 0$ ottengo $\alpha_\lambda(f) = S(f, b(k)) = \alpha_0(f) - S(f, a_\lambda(k))$ da cui

$$\alpha_{\lambda+\mu}(f) + \alpha_0(f) = \alpha_\mu(f) + \alpha_\lambda(f)$$

Procedendo nello stesso modo o esprimendo le $\tilde{\alpha}_\lambda$ in funzione delle α_λ lo stesso risultato si può ricavare per le $\tilde{\alpha}_\lambda$.

5.2 La formula trisecante

Riprendiamo ora le equazioni che abbiamo ricavato per la τ nel capitolo 2. In particolare ci interessa l'equazione puramente algebrica ricavata per la τ nel caso $n = 4$:

$$A_1\tau_{\lambda_{42}}\tau_{\lambda_{13}} + A_2\tau_{\lambda_{43}}\tau_{\lambda_{12}} + A_3\tau_0\tau_{\lambda_{43}+\lambda_{12}} = 0.$$

Supponiamo ora di avere quattro punti distinti P_1, P_2, P_3, P_4 sulla superficie X, Scelgo un line bunde L di grado $g-1$ in modo che si possa porre $g = 0$ nelle costruzioni effettuate nel paragrafo 4 del capitolo precedente; ovvero che sia $\sigma(z^\lambda W) \neq 0 \quad \forall\lambda \in \Lambda$. Come ho già osservato un tale L esiste.

Sostituisco ora nella formula precedente l'espressione che fornisce la τ in funzione della θ ottenedo così:

$$A_1\tilde{C}_{\lambda_{42}}\tilde{C}_{\lambda_{13}}e^{\tilde{\alpha}_{\lambda_{42}}(f)+\tilde{\alpha}_{\lambda_{13}}(f)}e^{S(f,b(f))+2g(f,f)}\theta(f-P_4+P_2-\beta)\theta(f-P_1+P_3-\beta)+$$

$$+A_2\tilde{C}_{\lambda_{43}}\tilde{C}_{\lambda_{12}}e^{\tilde{\alpha}_{\lambda_{43}}(f)+\tilde{\alpha}_{\lambda_{12}}(f)}e^{S(f,b(f))+2g(f,f)}\theta(f-P_4+P_3-\beta)\theta(f-P_1+P_2-\beta)+$$

$$+A_3\tilde{C}_0\tilde{C}_{\lambda_{43}+\lambda_{12}}e^{\tilde{\alpha}_0(f)+\tilde{\alpha}_{\lambda_{43}+\lambda_{12}}(f)}e^{S(f,b(f))+2g(f,f)}\theta(f-\beta)\theta(f-P_4-P_1+P_2+P_3-\beta) = 0$$

grazie all'osservazione fatta nel paragrafo precedente possiamo semplificare i termini in cui f compare nell'esponenziale e ponendo $P_1 = A$ $P_2 = X$ $P_3 = Y$ $P_4 = B$ si ottiene:

$$A_1\tilde{C}_{\lambda_{42}}\tilde{C}_{\lambda_{13}}\theta(t-B+X)\theta(t-A+Y) + A_2\tilde{C}_{\lambda_{43}}\tilde{C}_{\lambda_{12}}\theta(t-B+Y)\theta(t-A+X) =$$

$$= -A_3\tilde{C}_0\tilde{C}_{\lambda_{43}+\lambda_{12}}\theta(t)\theta(t-A-B+X+Y)$$

per ogni $t \in \mathbb{C}^g$ che è la formula trisecante.

Usando l'identità dimostrata nel paragrafo 2 del capitolo 3 otteniamo:

$$0 = \sum_{\nu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} \Bigg(C_1\theta[\nu](\frac{X-A-B+Y}{2})+$$

$$+ C_2\theta[\nu](\frac{X-A+B-Y}{2}) + C_3\theta[\nu](\frac{X+A-B-Y}{2})\Bigg)\, \theta(t+\frac{X-A-B+Y}{2})$$

e per la lineare indipendenza delle $\theta[\nu]$ si ottiene:

$$C_1\theta[\nu](\frac{X-A-B+Y}{2})+C_2\theta[\nu](\frac{X-A+B-Y}{2})+C_3\theta[\nu](\frac{X+A-B-Y}{2}) = 0$$

per ogni ν. da cui, poiché $C_\lambda \neq 0 \quad \forall\lambda \in \Lambda$ e quindi $C_1, C_2, C_3 \neq 0$ si ottiene:

$$\bar{\theta}(\frac{X-A-B+Y}{2}) \qquad \bar{\theta}(\frac{X-A+B-Y}{2}) \qquad \bar{\theta}(\frac{X+A-B-Y}{2})$$

$$\text{sono allineati} \qquad \forall A, B, X, Y \in X$$

che è la formula trisecante nella sua interpretazione attraverso la mappa di Kummer.

Riesprimo infine l'ultimo risultato nella forma in cui viene utilizzato nel criterio di Gunning citato nell'introduzione. Sia X_ϕ l'immagine di X in $H^1(X, \mathcal{O})$ mediante la mappa di Abel.

Nella formula precedente ponendo $W = \frac{X-A-B-Y}{2}$ ottengo:

$$\bar{\theta}(W+Y) \qquad \bar{\theta}(W+B) \qquad \bar{\theta}(W+A) \qquad \text{sono allineati}$$

Ovvero si ha il seguent teorema:

Teorema 5.1 $\forall A, B, C \in X$ *e* $\forall W \in \frac{1}{2}(X_\phi - A - B - C)$ *si ha:*

$$\bar{\theta}(W+A) \qquad \bar{\theta}(W+B) \qquad \bar{\theta}(W+C) \qquad \textit{sono allineati}$$