Esercizi per le vacanze di Natale

Esercizio 1. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{C}$, il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 10 & 2k \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Determinare per quali $k \in \mathbb{C}$ il vettore u_k appartiene al piano generato da v_k e w; dove

$$u_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k \end{pmatrix} \qquad v_k = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad w = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.
i) Siano V uno spazio vettoriale su $\Bbbk$ con base $\mathbf{v}$: v_1, v_2. Sia $\mathbf{v}'$ la base $v_1' = v_1 - 2v_2$, $v_2' = v_1 - 3v_2$. Calcolare la matrice del cambiamento di coordinate, ovvero la matrice che trasforma le coordinate rispetto alla base $\mathbf{v}'$ nelle coordinate rispetto alla base $\mathbf{v}$.
ii) Sia W uno spazio vettoriale su $\Bbbk$ con base $\mathbf{w}$: w_1, w_2, w_3. Sia $\mathbf{w}'$ la base $w_1' = w_1 + w_2 + 2\,w_3$, $w_2' = 2\,w_2 + 3\,w_3$ e $w_3' = -2\,w_1 + 5\,w_2 + 6\,w_3$. Calcolare la matrice del cambiamento di coordinate, ovvero la matrice che trasforma le coordinate rispetto alla base $\mathbf{w}'$ nelle coordinate rispetto alla base $\mathbf{w}$.
iii) Sia $L : V \longrightarrow W$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alle basi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si scriva:
a) La matrice associata a L rispetto alle basi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}'$;
b) La matrice associata a L rispetto alle basi $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{w}$;
c) La matrice associata a L rispetto alle basi $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{w}'$.

[NOTA: questo esercizio è quasi identico ad uno dato in precedenza. Serve per chi deve controllare se ha capito i cambiamenti di coordinate.]

Esercizio 4. Applicare il teorema degli orlati per determinare per quali $k \in \mathbb{C}$ il seguente sistema ha soluzione.

$$\begin{cases} x + 3\,y + 5\,z = 2; \\ -2\,x + y - 3\,z = -2; \\ x + 10\,y + 12\,z = k. \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $V = \{(p(t), q(t)) \; : \; p(t) \text{ e } q(t) \in \Bbbk[t]_{\leqslant 2}\}$ lo spazio vettoriale delle coppie di polinomi a coefficienti complessi di grado minore o uguale a 2. Sia $L : V \longrightarrow \mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ definito da $L\big((p(t), q(t))\big) = \begin{pmatrix} p'(1) & q(2) + p(1) \\ 2q(0) & p(1) \end{pmatrix}$. Scegliere una base di V, una base di $\mathsf{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ e scrivere la matrice associata ad L rispetto a queste basi.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su $\Bbbk$. Sia $W = L(V, V)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni $\Bbbk$-lineari di V in V e sia $U = L(W, W)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni $\Bbbk$-lineari di W in W. Se $A \in W$, si considerino le applicazioni lineari di $T_A, S_A : W \longrightarrow W$ definite da $T_A(X) = AX$ e $S_A(X) = AX - XA$. Si osservi che T_A, S_A sono elementi di U e si definiscano le due applicazioni lineari $T, S : W \longrightarrow U$ mediante $T(A) = T_A$ e $S(A) = S_A$.
(1) Si calcoli la dimensione di W e di U;
(2) si determini il rango di S e T.

[NOTA: questo esercizio è semplice ma a prima vista potrebbe spaventare. In realtà serve solo un minimo di formalismo per capire cosa stia succedendo. Per il calcolo del rango si suggerisce di applicare la formula di Grassmann e calcolare la dimensione del nucleo. Per l'applicazione T di fatto la dimensione del nucleo era stata calacolate in un precedente esercizio (35 canale Fiorenza, 45 canale Manetti]

$*$ **Esercizio 7.** Data una matrice A $n \times n$ e una matrice B $m \times m$. Si consideri la matrice

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} \mathsf{A} & 0 \\ 0 & \mathsf{B} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che C è diagonalizzabile se e solo se A e B sono entrambe diagonalizzabili.

$*$ **Esercizio 8.** Sia data una matrice A $n \times n$ a coefficienti complessi e si consideri la matrice $2n \times 2n$

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A} \\ \mathsf{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che B è diagonalizzabile se e solo se $\det \mathsf{A} \neq 0$ e A è diagonalizzabile.