Esercizi giovedì 21 ottobre

Esercizio 1. Siano A e B due sottoinsiemi di X. Quale relazione sussiste tra $X \setminus (A \cup B)$ e $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

Esercizio 2. Sia $A = \{n \in \mathbb{Z} : \exists m, q \in \mathbb{Z} \text{ tale che } q > 1 \text{ e } m^q = n\}$. Descrivere il complementare di A in $\mathbb{Z}$ ed in $\mathbb{R}$ utilizzando i quantificatori.

Esercizio 3. Calcolare l'inverso di $3 + 4i$.

Esercizio 4. Si calcolino le soluzioni dell'equazione $t^2 - 2it + 8 = 0$.

Esercizio 5. Se $z = x + iy$ si definisce $\overline{z}$, il *coniugato* di z come $\overline{z} = x - iy$. Si dimostri che

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$;
(2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$;

Esercizio 6. Sia $z = x + iy$, si calcoli $z \cdot \overline{z}$ e $z + \overline{z}$.

Esercizio 7. Si dimostri che ogni numero complesso risolve una equazione di secondo grado a coefficienti reali.

Esercizio 8. (1) Si calcolino le coordinate polari del numero complesso $z = \sqrt{3} + i$.
(2) Si calcoli il numero complesso che ha coordinate polari $\rho = 2$ e $\theta = \frac{3}{2}\pi$.

Esercizio 9. Si definisca $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ per y un numero reale e, in generale, se $z = x + iy$ si definisca $e^z = e^x e^{iy}$.
Si dimostri che $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Esercizio 10. Si dimostri che z ha coordinate polari ρ, θ se e solo se $z = e^{\log \rho + i\theta}$.

$*$ **Esercizio 11.** (1) Dimostrare che $\mathbb{R}$ può essere ordinato in un unico modo, ovvero esiste un'unica relazione $<$ su $\mathbb{R}$ tale che
 (a) per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ diversi tra loro vale $x < y$ o $y < x$;
 (b) se $x < y$ allora $x + z < y + z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$;
 (c) se $0 < x$ e $0 < y$ allora $0 < xy$.
(2) Dimostrare che non esiste una relazione su $\mathbb{C}$ con le stesse proprietà.

Esercizi giovedì 28 ottobre

Esercizio 12. Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione ed A un sottoinseme di X. Dire quali delle seguenti inclusioni sono sempre vere e quali, invece, in certi casi sono false (per ogni inclusione vera scrivere una dimostrazione; per ogni inclusione falsa, portare un controesempio).

i) $f^{-1}(f(A)) \supset A$,
ii) $f^{-1}(f(A)) = A$,
iii) $f(f^{-1}(f(A))) \subset f(A)$.

Esercizio 13. Esprimere l'inverso di $3 + 2\sqrt{2}$ nella forma $a + b\sqrt{2}$ con a, b razionali.

Esercizio 14. Esprimere l'inverso di $1 + \sqrt[3]{2}$ nella forma $a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2$ con a, b, c razionali.

Esercizio 15. Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ esiste sempre la radice quadrata di z (esiste w tale che $w^2 = z$).

Esercizio 16. Quante sono le radice n-esime di 1? w si dice una radice n-sima di 1 se $w^n = 1$.

Esercizio 17. Descrivere il luogo degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - i| < |z + i|$.

Esercizio 18. Descrivere il luogo degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z^2 - i| < |z^2 + i|$.

Esercizio 19. Se a, b, c, d sono numeri complessi distinti definiamo il birapporto di a, b, c, d nel seguente modo:

$$birapp(a, b, c, d) = \frac{a - c}{a - d} \cdot \frac{b - d}{b - c}.$$

Dimostrare che
$$birapp(a,b,c,d) = birapp(b,a,d,c) = birapp(c,d,a,b) = birapp(d,c,b,a).$$

Esercizio 20.
i) Descrivere l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $birapp(z,1,2,3)$ è un numero reale.
ii) Descrivere l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $birapp(z,2i+1,1,i)$ è un numero reale.

$*$ **Esercizio 21.** Siano a,b,c numeri complessi distinti. Descrivere il luogo degli z tali che $birapp(z,a,b,c)$ è un numero reale.

Esercizi giovedì 4 novembre 2010

Esercizio 22. Il Professor Marco Fiorenza a lezione ha dato la seguente dimostrazione che tutti i gatti sono bigi:

Primo passo: tutti i gatti hanno lo stesso colore. Per induzione sul numero dei gatti dimostriamo che n gatti hanno tutti lo stesso colore. Se $n=1$ è vero. Se n gatti hanno lo stesso colore allora anche $n+1$ gatti hanno lo stesso colore, infatti numeriamo i gatti con i numeri da 1 a $n+1$. Per induzione quelli numerati da 1 a n hanno tutti lo stesso colore ovvero lo stesso colore del gatto con il numero 2. Analogamente per i gatti da 2 a $n+1$. Quindi hanno tutti lo stesso colore.

Secondo passo: il gatto del Professor Domenico Manetti è bigio

Quindi tutti i gatti sono bigi.

... eppure qualche dubbio rimane...

Esercizio 23. Sia X un insieme e siano $A_1,\dots,A_n$ dei sottoinsiemi di X. Dimostrare che
$$X \smallsetminus (A_1 \cup \dots \cup A_n) = (X \smallsetminus A_1) \cap \dots \cap (X \smallsetminus A_n).$$

Esercizio 24. Siano X un insieme ed f e $g : X \to X$ due applicazioni da X in X. Ricordiamo che la composizione di f e g è l'applicazione $f \circ g : X \to X$ tale che $(f \circ g)(x) := f(g(x))$, per ogni $x \in X$ ("prima facciamo g e poi facciamo f").

Dimostrare che se f e g commutano, ovvero $f \circ g = g \circ f$, allora anche i loro quadrati $f^2 := f \circ f$ e $g^2 := g \circ g$ commutano.

Esercizio 25. Dire quali dei seguenti insiemi è un sottospazio.
i) $\{(x,y,z) \in \Bbbk^3 \,:\, x+y+z=0\}$;
ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z \leqslant 1\}$;
iii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2=0\}$;
iv) $\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2=0\}$.

Esercizio 26. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$.
i) Dire per quali sottospazi W il complementare $\mathbb{C}^n \smallsetminus W$ è a sua volta un sottospazio.
ii) Dire per quali sottospazi W l'insieme $(\mathbb{C}^n \smallsetminus W) \cup \{0\}$ è a sua volta un sottospazio.

Esercizio 27. Sia V uno spazio vettoriale e siano $W_1,\dots,W_n$ dei sottospazi. Si dimostri che $W_1 \cap \dots \cap W_n$ è un sottospazio.

$*$ **Esercizio 28.** Siano $V_1 \dots, V_n$ dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{C}^n$.
i) se $V_1 \cup V_2$ è un sottospazio vettoriale allora $V_1 \supset V_2$ o $V_2 \supset V_1$;
ii) se $V_1 \cup \dots \cup V_n$ è un sottospazio vettoriale allora esiste i tale che $V_i \supset V_j$ per ogni j.

Esercizio 29. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, siano dati i seguenti vettori:
$$v_1 = (1,2,3) \qquad v_2 = (3,5,7) \qquad v_3 = (2,3,5) \qquad v_4 = (-1,-1,-2).$$
i) I vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti? Generano $\mathbb{R}^3$?
ii) Quali sottoinsiemi dell'insieme $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$?
iii) Scegliere una base e scrivere il vettore $v=(1,1,0)$ nella base.

Esercizio 30. Sia X un insieme ed A un sottoinsieme finito di X.

i) Si dimostri che l'insieme $V = \{f : X \to \mathbb{C}\}$ (delle funzioni da X in $\mathbb{C}$) è uno spazio vettoriale.
ii) Si dimostri che l'insieme $\{f : X \to \mathbb{C} \mid f(a) = 0 \,\forall\, a \in A\}$ (delle funzioni da X in $\mathbb{C}$ che si annullano su A) è un sottospazio vettoriale di V.
iii) L'insieme delle funzioni $\{f \in V \mid \sum_{a\in A} f(a) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V?
iv) L'insieme delle funzioni $\{f \in V \mid \prod_{a\in A} f(a) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale V?

Esercizi giovedì 11 novembre 2010

Esercizio 31. È possibile trovare applicazioni f e g che non commutano, ma i cui quadrati commutano? (ovvero $f^2 \circ g^2 = g^2 \circ f^2$ ma $f \circ g \neq g \circ f$).

Esercizio 32. Costruire uno spazio vettoriale V e tre suoi sottospazi A, B, C tali che

$$(A \cap B) + (A \cap C) \neq A \cap (B + C).$$

Esercizio 33. Sia $f : X \longrightarrow X$ una applicazione tra insiemi. Dimostrare che se f^2 è invertibile allora f è invertibile.

Esercizio 34. Sia X un insieme finito. Per ogni $x_0 \in X$ si definisca la funzione $\delta_{x_0} : X \to \mathbb{C}$:

$$\delta_{x_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_0; \\ 0, & \text{se } x \neq x_0. \end{cases}$$

Mostrare che le funzioni δ_{x_0}, al variare di $x_0 \in X$ costituiscono una base di $V = \{f : X \to \mathbb{C}\}$. Se X e' infinito?

Esercizio 35. Sia $V = \Bbbk[x]_{\leqslant n}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\Bbbk$ di grado minore o uguale a n.

Siano $p_0, p_1, \ldots, p_n \in V$ polinomi non nulli con grado di p_i uguale a i per $i = 0, \ldots, n$. Dimostrare che sono una base di V.

Esercizio 36. Sia V uno spazio vettoriale e $f : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che $f^2 - f + id = 0$. Dimostrare che f è invertibile e che $f^{-1} = 1 - f$.

Esercizio 37. Sia $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ due applicazioni tra insiemi. Dimostrare che se f, g sono iniettive allora $g \circ f$ è iniettiva. Vale l'enunciato analogo per mappe surgettive?

Esercizio 38. Sia $f : X \longrightarrow Y$ una applicazione tra insiemi. Dimostrare che esiste $g : Y \longrightarrow X$ tale che $g \circ f = id_X$ se e solo se f e' iniettiva.

Esercizio 39. Sia $W = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y + z = 0 \text{ e } x + 2y + u = 0\}$. Trovare una base di W e estenderla ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 40. Sia W un sottospazio dello spazio vettoriale V. Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V. Dimostrare che esiste una base $w_1, \ldots, w_h$ di W e un sottoinsieme I di $\{1, \ldots, n\}$ tale che $\{w_i \,:\, i = 1, \ldots, h\} \cup \{v_i \,:\, i \in I\}$ è una base di V.

Esercizio 41. Sia M lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $L : \mathsf{M} \longrightarrow \mathsf{M}$ definito da $L(\mathsf{B}) = \mathsf{A}\,\mathsf{B} - \mathsf{B}\mathsf{A}$:

(1) dimostrare che L è una applicazione lineare;
(2) scegliere una base di M e scrivere la matrice associata a L rispetto a questa base;
(3) descrivere il nucleo L.

Esercizio 42. Si calcoli l'inversa delle seguente matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 43. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata (rispetto alla base canonica)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Siano $v_1 = (2, 1, 1)$, $v_2 = (3, 4, 1)$ e $v_3 = (1, 4, 0)$ tre vettori di $\mathbb{R}^3$.

i) si verifichi che v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$;
ii) si scriva la matrice associata ad L rispetto alla base v_1, v_2, v_3.

Esercizio 44. Ricordiamo che i numeri di Fibonacci sono definiti nel seguente modo $F_0 = 1, F_1 = 2$ e $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ per $i \geqslant 1$. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^5$ definiti nel modo seguente: $v_i = (1, F_i, F_i^2, F_i^3, F_i^4)$ per $i = 1, .., 5$. È noto che i vettori $v_1, \dots, v_5$ sono una base di $\mathbb{R}^5$ detta la base di Fibonacci-Vandermonde.

Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ la cui matrice associata nella base canonica è data dalla matrice
$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$
Si scriva la matrice associata ad L rispetto alla base di Fibonacci-Vandermonde.

Esercizio 45. Sia
$$\mathsf{Z} = \{\mathsf{A} \in \mathsf{Mat}_{n\times n} \ : \ \mathsf{AB} = \mathsf{BA} \text{ per ogni } \mathsf{B} \in \mathsf{Mat}_{n\times n}\}.$$
Dimostrare che Z è un sottospazio vettoriale di $\mathsf{Mat}_{n\times n}$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 46. Nello spazio vettoriale $V = \Bbbk[x]_{\leqslant 5}$ dei polinomi di grado minore o uguale a 5 a coefficienti in $\Bbbk$ si considerino i sottospazi
$$U = \{p(x) \in V \ : \ \text{il grado di } p \text{ sia minore o uguale a } 2\};$$
$$W = \{p(x) \in V \ : p(0) = p(1) = p(2) = 0\}.$$
Si mostri che $U \cap W = \{0\}$ e che $U + W = V$. In questi casi si scrive $V = U \oplus W$.

Esercizio 47. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $L : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che $L^2 = id$. Sia $U = \ker(L + id)$ e $W = \ker(L - id)$ si dimostri che $V = U \oplus W$.

Esercizio 48. Si calcoli l'inversa delle seguente matrice a coefficienti funzioni razionali (quozienti di polinomi) nella variabile t:
$$\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ \frac{1}{t^2+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 49. Sia $V = \Bbbk[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\Bbbk$ nella variabile x. Si considerino le due applicazioni $F, G : V \longrightarrow V$ definite da
$$F(p(x)) = xp(x) \ \text{ and } \ G(p(x)) = \frac{p(x) - p(0)}{x}.$$
La G prende un polinomio ci leva il termine noto e lo divide per x, per esempio $G(x^2 + 1) = x$. Si dimostri che F e G sono lineari. Si dimostri che $G \circ F = id$, si calcoli $F \circ G$ e si osservi che non è uguale all'identità? Come mai?

3. Esercizi giovedì 9 dicembre

Esercizio 50. Sia $V = \mathbb{k}^3$ e sia V^* lo spazio vettoriale duale. Si consideri la base $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 1, 3)$. Si calcoli la base duale.

Esercizio 51. Per ogni A matrice $m \times n$ e per ogni B matrice $n \times m$, dimostrare che:

$$\mathrm{Tr}(\mathsf{A}\,\mathsf{B}) = \mathrm{Tr}(\mathsf{B}\,\mathsf{A}).$$

Esercizio 52. Sia $V = \mathbb{k}[x]_{\leqslant 3}$. Si consideri la base di V data da $v_1 = x + 1$, $v_2 = x + 2$, $v_3 = x^2 + 1$, $v_4 = x^3 + 1$. Scrivere la matrice del cambiamento di base che esprime le coordinate nella base usuale $1, x, x^2, x^3$ rispetto alla base v_i, ovvero la matrice che trasforma le coordinate rispetto alla base v_i nelle coordinate rispetto alla base $1, x, x^2, x^3$. Sia $L : V \longrightarrow V$ l'applicazione lineare definita da $L(f(x)) = xf'(x) + f(x)$. Si scriva la matrice associata a L rispetto alla base v_i in partenza e $1, x, x^2, x^3$ in arrivo.

Esercizio 53.
i) Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ con base $\mathbf{v}$: v_1, v_2, v_3. Sia $\mathbf{v}'$ la base $v_1' = v_1 + v_2$, $v_2' = -v_2$, $v_3' = -v_1 - v_2 + v_3$. Sia $u = x\,v_1' + y\,v_2' + z\,v_3'$, scrivere u nella base $\mathbf{v}$. Dedurne la matrice del cambiamento di cordinate, ovvero la matrice che trasforma le coordinate rispetto alla base $\mathbf{v}'$ nelle coordinate rispetto alla base $\mathbf{v}$.
ii) Sia W uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ con base $\mathbf{w}$: w_1, w_2. Sia $\mathbf{w}'$ la base $w_1' = w_1 + w_2$, $w_2' = 2\,w_1 + w_2$. Sia $w = x\,w_1' + y\,w_2'$, scrivere w nella base $\mathbf{w}$. Dedurne la matrice del cambiamento di cordinate, ovvero la matrice che trasforma le coordinate rispetto alla base $\mathbf{w}'$ nelle coordinate rispetto alla base $\mathbf{w}$.
iii) Sia $L : V \longrightarrow W$ l'applicazione lineare che ha come matrice associata rispetto alle basi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si scriva:
  a) La matrice associata a L rispetto alle basi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}'$;
  b) La matrice associata a L rispetto alle basi $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{w}$;
  c) La matrice associata a L rispetto alle basi $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{w}'$.

Esercizio 54. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. Sia $L^t : W^* \longrightarrow V^*$ l'applicazione trasposta. Si dimostri che L è surgettiva se e solo se L^t è iniettiva.

Esercizio 55. Siano U, W due sottospazi vettoriali di V e si consideri la somma diretta astratta Z di U e W: $Z = U \oplus W$. Sia $s : U \oplus W$ definita da $s(u, w) = u - w$.
i) Si mostri che s è lineare;
ii) Si mostri che s è iniettiva se e solo se $U \cap W = \{0\}$;
iii) Si mostri che s è surgettiva se e solo se $U + W = V$.

Esercizi giovedì 16 dicembre

Esercizio 56. Sia $L : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare di rango r (ovvero la dimensione dell'immagine uguale a r). Dimostrare che esiste una base di V e una base di W tale che la matrice associata a L in questa base ha la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

ha tutte le entrate fuori della diagonale (gli elementi della matrice di coordinate i, i) nulle, le prime r entrate sulla diagonale sono uguali a 1 e le rimanenti sono uguali a 0.

Esercizio 57. Determinare il rango della matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 58. Sia V uno spazio vettoriale e U, W due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$. Dimostrare che $V^* = ann(U) \oplus ann(W)$, dove se Z è un sottospazio di V definiamo $ann(Z) = \{\varphi \in V^* \, : \, \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in Z\}$.

Esercizio 59. Si calcoli il determinante della matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 60. Sia $b_1, \dots, b_n \in \Bbbk$. Definiamo la matrice di Vandermonde $\mathsf{V}(b_1, \dots, b_n)$ come la matrice, quadrata $n \times n$, $\big(a_{ij}\big)$, con $a_{ij} = b_i^{j-1}$ ovvero
$$\mathsf{V}(b_1, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1^2 & \dots & b_1^{n-1} \\ 1 & b_2 & b_2^2 & \dots & b_2^{n-1} \\ & & & \dots & \\ 1 & b_n & b_n^2 & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$
Si dimostri che
$$\det \mathsf{V}(b_1, \dots, b_n) = \prod_{i<j} (b_j - b_i)$$

Esercizi giovedì 13 gennaio

Esercizio 61. Dire quante sono le matrici A, $n \times n$ a coefficienti interi tali che $\mathsf{A}\,\mathsf{A}^t = \mathsf{I}$.

Esercizio 62. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti complessi di polinomio caratteristico $p(t) = t^n - 1$. Si dimostri che è diagonalizzabile.

Esercizio 63. Sia A una matrice invertibile $n \times n$ a coefficienti interi. Mostrare che la matrice inversa di A a coefficienti interi se e soltanto se $\det(\mathsf{A}) = \pm 1$.

Esercizio 64. Sia A la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Si determinino: il polinomio caratteristico, gli autovalori, gli autovettori e diagonalizzare la matrice. È sempre vero che le matrici antidiagonali sono diagonalizzabili?

Esercizi giovedì 20 gennaio

Esercizio 65. Si determinino gli autospazi generalizzati della applicazione lineare $L : \Bbbk^4 \longrightarrow \Bbbk^4$ associata alla matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 66. Sia A la matrice 2011×2011 che ha tutte le entrate uguali ad 1. Si dica se è diagonalizzabile e se ne calcoli il polinomio caratteristico.

Esercizio 67. Sia V uno spazio vettoriale e $A, B, C : V \longrightarrow V$ tre applicazioni lineari con C invertibile e $A = CBC^{-1}$. Si dimostri che se V_λ è l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore λ di B allora $C(V_\lambda)$ è l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore λ di A.

Esercizio 68. Sia V lo spazio vettoriale delle applicazioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ che sono differenziabili un numero infinito di volte. Sia $D, E : V \longrightarrow V$ le applicazioni definite da $D(f) = f'$ (la derivata di f) e $E(f) = e^t \cdot f$ (la moltiplicazione per la funzione esponenziale e^t).

(1) Si calcoli l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore 0.
(2) Si mostri $EDE^{-1} = D - Id$.
(3) Si calcoli l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore 1.

Esercizio 69. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 4 e sia $L : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che $L + \lambda L$ è surgettiva per ogni numero complesso λ diverso da 0. Si calcoli il polinomio caratteristico di L.

Esercizio 70. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia L un applicazione lineare di V in V. Sia $L^3 - 2L^2 + L = 0$ e sia 1 la molteplicità geometrica degli autovalori 1 e 0. Si calcoli il polinomio caratteristico di L.

Esercizio 71. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e sia L un applicazione lineare di V in V tale che $L^7 = 0$. Si dimostri che $L^5 = 0$.

Esercizio 72. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita n e A una applicazione lineare di V in V. Si dimostri che $Tr(A^m) = 0$ per $m = 1, 2, \dots, n$ se e solo se A è nilpotente (cioè che $A^n = 0$).

Esercizio 73. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita e $A, B : V \longrightarrow V$ due applicazioni lineari. Si supponga che $AB - BA = B$. Si mostri che B è nilpotente.

Esercizio 74. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $W = L(V, V)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V a V. Sia $A \in W$ e siano $T_A : W \longrightarrow W$ definite da $T_A(X) = AX$. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è uguale a $t^2(t-1)$ si calcoli il polinomio caratteristici di T_A. Se V_0 e V_1 sono gli autospazi generalizzati di A si descrivano gli autospazi generalizzati di T_A. Si dimostri inoltre che se A ̀diagonalizzabile allora lo è anche T_A e che se A è nilpotente lo è anche T_A.

Esercizio 75. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 3 e sia $W = L(V, V)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V a V. Sia $A \in W$ e siano $S_A : W \longrightarrow W$ definite da $S_A(X) = AX - XA$. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è uguale a $t^2(t-1)$ si calcoli il polinomio caratteristico di S_A. Se V_0 e V_1 sono gli autospazi generalizzati di A si mostri che gli autospazi generalizzati di A sono

$$H_{00} = \{X \in W \,:\, X(V_0) \subset V_0 \text{ e } X(V_1) \subset V_1\}$$
$$H_{10} = \{X \in W \,:\, X(V_0) \subset V_1 \text{ e } X(V_1) = 0\}$$
$$H_{01} = \{X \in W \,:\, X(V_1) \subset V_0 \text{ e } X(V_0) = 0\}.$$

Si dimostri che se A ̀diagonalizzabile allora lo è anche S_A e che se A è nilpotente lo è anche S_A.