PERCENTUALI

Giacomo Tommei

e-mail: *giacomo.tommei@unipi.it*

web: *people.unipi.it/tommei*

Cos'è una percentuale?

Le percentuali vengono usate quando si vuole fare un **confronto** tra due quantità dello stesso tipo, mostrando che una delle due è una certa frazione dell'altra. Infatti, una percentuale non è altro che una **frazione** con denominatore uguale a 100 (e numeratore non necessariamente intero):

$$22\% = \frac{22}{100}$$

Cosa significa prendere una percentuale $i\%$ di una data quantità x? Semplicemente moltiplicare x per $i/100$: quindi il calcolo di una percentuale è sempre una moltiplicazione.

Esempio

Il 25% *di* 72 *è uguale a* $\frac{25}{100} \cdot 72 = \frac{1}{4} \cdot 72 = 18.$

Esercizio

Se la popolazione di uno Stato è diminuita del 10% nel 2008, in quale percentuale dovrebbe aumentare nel 2009 per tornare alla numerosità di partenza?

Se non si fosse compreso a pieno cosa significa calcolare una percentuale la risposta (sbagliata!) potrebbe essere 15%; naturalmente non è così, proviamo a spiegare il perché. Supponiamo che la popolazione dello Stato in esame, all'inizio del 2011, fosse composta da N individui. Se nel 2011 cè stata una diminuzione del 10% significa che all'inizio del 2012 il numero di individui è

$$N - \frac{15}{100}\,N = \frac{85}{100}\,N$$

Per tornare ad essere N, la popolazione nel 2012 deve aumentare di $(15/100)\,N$ (su un totale di $(85/100)\,N$) per cui l'aumento percentuale deve essere

$$\frac{(15/100)\,N}{(85/100)\,N} = \frac{15}{85} = \frac{3}{17} \simeq 17.6\%$$

Esercizio

Nel 2006, un campo di 200 m^2 *viene coltivato per il* 25% *a ortaggi, per il* 40% *a barbabietole e per il resto a soia. Un* m^2 *di terreno produce in un anno* 5 *kg di ortaggi,* 8 *kg di bietole, e* 10 *kg di soia.*

a) *Quanti kg di soia vengono prodotti nel 2006?*

b) *Nel 2007, metà del campo viene coltivata a barbabietole, il* 20% *a ortaggi e il resto a soia. Di quanto è aumentata in percentuale la produzione di barbabietole rispetto al 2006?*

c) *Nel 2008 il proprietario del campo decide di acquistare un campo vicino, così da aumentare la superficie coltivabile del 20%. Quale percentuale di questa nuova superficie deve destinare alla coltivazione di soia, se vuole aumentare la produzione di soia del 2% rispetto al 2007?*

Soluzione esercizio

a) La porzione di campo destinata alla soia è

$$(100 - 25 - 40)\% = 35\%$$

quindi $200 \times 35/100 = 70$ m^2. La produzione di soia nel 2006 è pertanto $70 \times 10 = 700$ kg.

b) La produzione, rispetto al 2006, di barbabietole ha subito un incremento del

$$\frac{50-40}{40}\% = 25\%$$

c) Il nuovo campo ha una superficie di $(20/100) \times 200 = 40$ m^2. Nel 2007 era stato destinato alla coltivazione della soia il 30% del vecchio campo, quindi $(30/100) \times 200 = 60$ m^2. Per aumentare la produzione del 2007 del 2% si deve aumentare la superficie coltivata a soia del 2%, quindi $(2/100) \times 60 = 1.2$ m^2 che corrispondono a $1.2 \times 100/40 = 3\%$ del nuovo campo.

Esercizio

Un allevatore di pastori tedeschi sta studiando la crescita di uno dei cuccioli dell'ultima cucciolata: per far questo registra il peso del cucciolo mensilmente. All'inizio del suo studio il cucciolo pesa 10 *kg, dopo il primo mese il peso è aumentato del* 20% *e tale incremento si registra anche nel secondo mese. Quanto vale l'incremento totale del peso del cucciolo nei due mesi?*

Se il peso iniziale è 10 kg, con un aumento del 20% il cucciolo andrà a pesare 12 kg dopo il primo mese; nel secondo mese il cucciolo aumenterà ancora il suo peso del 20% del peso iniziale del mese, ovvero di 12 kg, arrivando a pesare 14.4 kg (il 20% di 12 è 2.4). In conclusione, dopo due mesi il peso del cucciolo è aumentato di 4.4 Kg sui 10 di partenza, ovvero c'è stato un incremento del 44%.

Generalizzazione

Se indichiamo il peso con la lettera p e la percentuale di incremento con i otteniamo che l'incremento è dato da

$$\frac{i}{100} \cdot p$$

mentre il peso aumentato è dato da

$$p + \frac{i}{100} \cdot p = p\left(1 + \frac{i}{100}\right)$$

Per ottenere il peso dopo il primo mese dobbiamo moltiplicare quindi il peso iniziale per il fattore $(1 + i/100)$; per il secondo aumento dobbiamo ancora moltiplicare per lo stesso fattore:

$$\left[p\left(1 + \frac{i}{100}\right)\right]\left(1 + \frac{i}{100}\right) = p\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$$

Lo stesso procedimento si può applicare ripetutamente: ad esempio dopo n mesi si ottiene

$$\boxed{p\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n}$$

L'espressione ottenuta non è altro che una **legge esponenziale**.

Esercizio

Una soluzione *è un sistema omogeneo prodotto dallo scioglimento di una sostanza solida, liquida o gassosa (*soluto*) in un opportuno liquido (*solvente*). La* concentrazione *di una soluzione, espressa solitamente in percentuale, è il rapporto tra la massa del soluto e quella della soluzione.*

a) 30 *g di sale vengono disciolti in* 90 *g di acqua; quanto vale la concentrazione della soluzione?*

b) *Aggiungendo* 100 *g di solvente ad una soluzione al* 10% *si ottiene una soluzione finale al* 6%*; calcola la massa iniziale della soluzione.*

c) *Abbiamo* 10 *kg di una soluzione al* 10% *e* 20 *kg della medesima soluzione al* 20%*, cosa succede alla concentrazione se si mescolano le due quantità di soluzioni?*

Soluzione esercizio

Indichiamo con s la massa del soluto e con S la massa del solvente.

a)
$$c = \frac{s}{S+s} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 25\%$$

b) $x = S + s$, ricaviamo la massa del soluto in funzione di x:
$$\frac{s}{x} = \frac{10}{100} \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{x}{10}$$

Dopo l'aggiunta dei 100 g di solvente la massa totale diventa $x + 100$ g e la concentrazione diventa il 6%, ma la quantità di soluto resta invariata; come prima possiamo ricavare la massa del soluto in funzione di x:
$$\frac{s}{x+100} = \frac{6}{100} \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{3\,(x+100)}{50}$$

Uguagliando le due espressioni per il soluto in funzione della massa iniziale si ottiene
$$\frac{x}{10} = \frac{3\,(x+100)}{50}$$

da cui
$$5\,x = 3\,x + 300 \quad \Leftrightarrow \quad x = 150\,\mathrm{g}\,.$$

Soluzione esercizio

c) Indichiamo con s_1 la massa del soluto della prima soluzione e con s_2 la massa del soluto della seconda soluzione:

$$\frac{s_1}{10} = \frac{10}{100}$$

da cui

$$s_1 = 1\,,$$

mentre

$$\frac{s_2}{20} = \frac{20}{100}$$

da cui

$$s_2 = 4\,.$$

Quindi la nuova soluzione, avente massa totale $10 + 20 = 30$ kg, ha concentrazione

$$c = \frac{s_1 + s_2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \simeq 16.7\%$$