FUNZIONI: LIMITI E CONTINUITÀ

Giacomo Tommei

e-mail: *giacomo.tommei@unipi.it*

web: *people.unipi.it/tommei*

Punti di accumulazione

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}$. Il numero reale x_0 è un punto di accumulazione di A, se ogni intorno completo di x_0 contiene almeno un elemento di A distinto da x_0.

Si usa il termine *accumulazione* per intendere che i punti di A si addensano attorno a x_0. Vista la definizione, **ogni punto di un intervallo è di accumulazione per l'intervallo stesso**.

Esempio

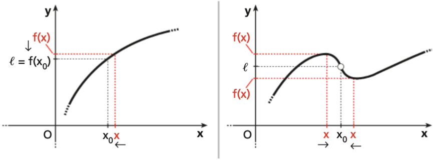
Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\}$$

All'aumentare di n gli elementi di A si avvicinano sempre di più a 1. È possibile verificare che il punto 1 gode della seguente proprietà: comunque scegliamo un intorno completo di 1 (anche di raggio molto piccolo), questo contiene infiniti elementi di A. Quindi 1 è un **punto di accumulazione** *di A. Nota che 1* **non** *appartiene all'insieme A.*

Limite finito di una funzione in un punto

Sia D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e consideriamo la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, il cui grafico è rappresentato in figura. Nel primo caso a sinistra $x_0 \in D$, mentre nel secondo a destra $x_0 \notin D$, ma è di accumulazione per D.



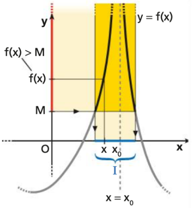
Come si vede dai grafici, **più scegliamo x vicino a x_0, più la sua immagine $f(x)$ si avvicina ad un valore ℓ.** Si scrive:

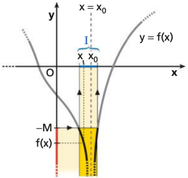
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

Definizione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Limite infinito di una funzione in un punto





$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty}$$

Definizione

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0,\ \exists\delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

Limite destro e sinistro di una funzione in un punto

- Il **limite destro** di una funzione viene indicato con il simbolo:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

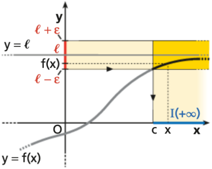
La definizione del limite destro è analoga a quella già data di limite, con la sola differenza che la disuguaglianza $|f(x) - \ell| < \epsilon$ deve essere verificata per ogni x appartenente a un intorno destro di x_0, ossia a un intorno del tipo $(x_0, x_0 + \delta)$.

- Il **limite sinistro** di una funzione viene indicato con il simbolo:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Anche per il limite sinistro valgono le stesse considerazioni fatte per il limite destro, con la sola differenza che $|f(x) - \ell| < \epsilon$ deve essere verificata per ogni x appartenente a un intorno sinistro di x_0, ossia un intorno del tipo $(x_0 - \delta, x_0)$.

Limite finito di una funzione all'infinito

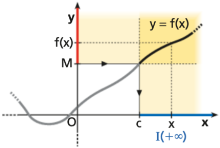


$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell}$$

Definizione

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0,\ \exists c > 0 : \ |x| > c \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Limite infinito di una funzione all'infinito



$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty}$$

Definizione

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M>0,\ \exists c>0 : |x|>c \Rightarrow |f(x)|>M$$

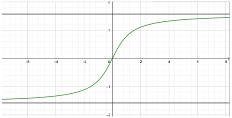
Asintoti

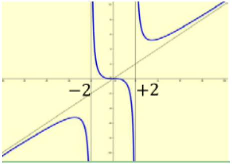
Definizione

Un **asintoto** *di una funzione è una retta la cui distanza da un generico punto del grafico della funzione tende a zero quando l'ascissa o l'ordinata del punto tendono a* ∞.

Gli asintoti sono di 3 tipi:

- **verticali**, $x = c$;
- **orizzontali**, $y = k$;
- **obliqui**, $y = m\,x + q$.





Teoremi vari

Teorema

(Unicità del limite) *Se una funzione ammette un limite, in un punto o all'infinito, questo limite è unico*

Teorema

(Permanenza del segno) *Quando il limite di una funzione in un punto $c \in \mathbb{R}$ è un numero ℓ diverso da zero,esiste un intorno di c in cui (escluso al più c) la funzione assume valori tutti dello stesso segno del limite.*

Teorema

(Confronto) *Se $f(x), h(x), g(x)$ sono tre funzioni definite in uno stesso intorno H del punto c (escluso al più c), e risulta*

- $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \ \ \forall x \in H, \ x \neq c$
- $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \ell$

allora si ha

$$\boxed{\lim_{x\to c} h(x) = \ell}$$

Operazioni con i limiti

Se $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ valgono **quasi** sempre:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} [c\,f(x)] = c \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\,g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

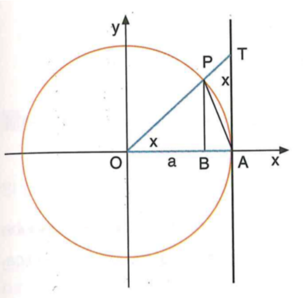
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \quad \text{se} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

quasi $\to$ attenzione alle **forme indeterminate**

$$+\infty - \infty \qquad \pm\infty \cdot 0 \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Limiti notevoli

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

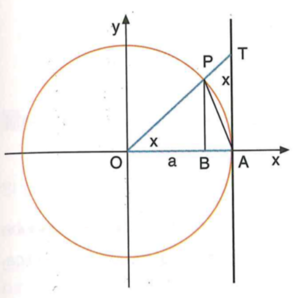


La funzione $f(x) = \sin x/x$ non è definita per $x = 0$. Calcoliamo il limite destro e consideriamo quindi $0 < x < \pi/2$.
Riferendoci alla figura, dette $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ le aree rispettivamente del triangolo OAP, del settore APO e del triangolo OAT si ha

$$\mathcal{A} < \mathcal{B} < \mathcal{C} \tag{1}$$

Limiti notevoli

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$



$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\overline{OA}\,\overline{BP} = \frac{1}{2}\,\sin x$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}\,\overline{OA}\;\;\widehat{AP} = \frac{1}{2}\,x$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\overline{OA}\,\overline{AT} = \frac{1}{2}\,\tan x$$

Da (1) si ha

$$\frac{1}{2}\,\sin x < x < \frac{1}{2}\,\tan x$$

Limiti notevoli

Dividendo per $(1/2)\sin x$ (che è un numero positivo) si ottiene

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

equivalente a

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Ma per $x \to 0^+$ si ha che $\cos x \to 1$ quindi per il teorema del confronto si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Limiti notevoli

Ponendo $x = -u$ si ha

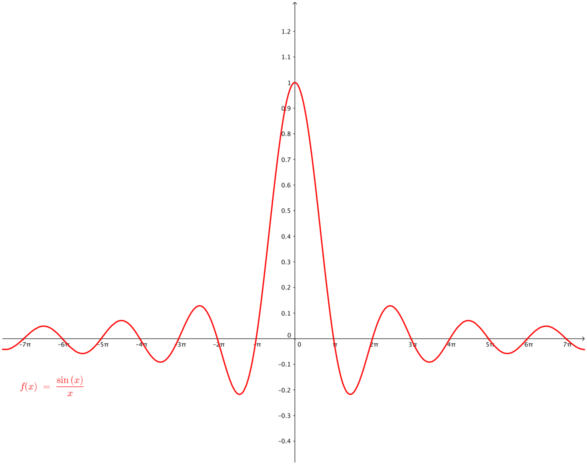
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin(-u)}{-u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{-\sin u}{-u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

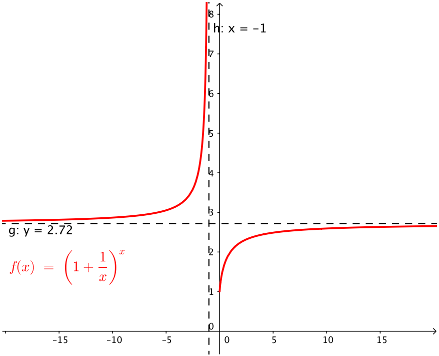
Attenzione: il limite notevole vale se x indica la misura dell'angolo in **radianti**.

Funzione $f(x) = sin(x)/x$



Limiti notevoli

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$



Numero di Neper (irrazionale, Eulero 1737)

$$e \simeq 2.718281828$$

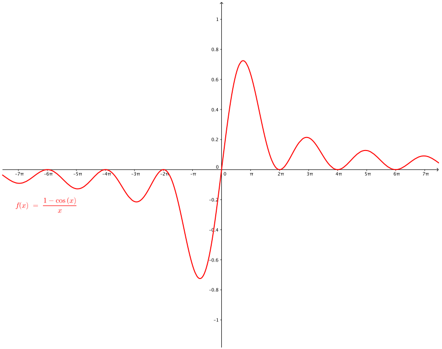
Limiti notevoli

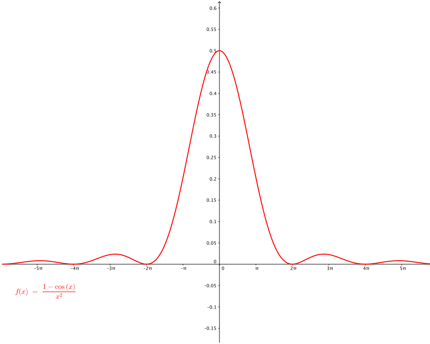
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha \qquad \lim_{x\to 0}(1+\alpha\, x)^{1/x}=e^\alpha$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad a>0$$

Grafici





Funzioni continue

Definizione

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è* **continua** *in un punto non isolato* x_0 *del proprio campo di esistenza se*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Ricordando la definizione di limite la definizione precedente è equivalente a

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \; : \quad |x - x_0| < \delta \; \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Definizione

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ *è* **continua** *in* I *se lo è in ogni punto di* I*.*

Funzioni continue - Esempi e proprietà

- Le funzioni potenza, le funzioni polinomiali, le funzioni razionali, le funzioni trigonometriche,le funzioni esponenziali e le funzioni logaritmiche sono continue dove definite.
- La somma, la differenza, il prodotto e il rapporto (dove il denominatore non si annulla) di funzioni continue sono funzioni continue.
- La composizione di due funzioni continue è continua.
- L'inversa di una funzione continua reale di variabile reale definita su un intervallo, quando esiste, è continua.

Funzioni continue - Teoremi

Teorema

(**Permanenza del segno**) *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0 e continua in x_0. Se $f(x_0) > 0$ allora esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Teorema

(**Esistenza degli zeri**) *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (o viceversa) allora esiste un $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Teorema

(**Esistenza dei valori intermedi**) *Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Funzioni continue - Teoremi

Teorema

(**Weierstrass**) *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ per ogni $x \in [a, b]$.*

Teorema

(**Esistenza dei valori intermedi riformulato**) *Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.*