

NUMERI NATURALI, INTERI E RAZIONALI

Giacomo Tommei

e-mail: [*giacomo.tommei@unipi.it*](mailto:giacomo.tommei@unipi.it)

web: [*people.unipi.it/tommei*](http://people.unipi.it/tommei)

L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N}

Definizione

I numeri naturali (chiamati anche interi non negativi) sono i numeri utilizzati per contare oggetti, $0, 1, 2, 3, \dots$. L'insieme dei numeri naturali si indica con \mathbb{N} .

Proprietà

- L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} è infinito.
- L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} è **chiuso** per le operazioni di addizione, prodotto ed elevamento a potenza. Ad esempio:
 $2 + 5 = 7 \in \mathbb{N}$, $5 \cdot 7 = 35 \in \mathbb{N}$, $3^2 = 9 \in \mathbb{N}$.
- L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} non è chiuso per le operazioni di sottrazione e divisione. Ad esempio: $3 - 7 = -4 \notin \mathbb{N}$, $2 : 4 = 0.5 \notin \mathbb{N}$.
- 0 è l'**elemento neutro** per l'addizione e 1 quello per il prodotto.

Definizione

Indicheremo con \mathbb{N}^+ i numeri naturali diversi da 0.

Numeri pari e dispari

- **Numeri pari** : sono della forma $2k$, con $k \in \mathbb{N}$
- **Numeri dispari** : sono della forma $2k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$

Esercizio

Se $n^3 + 2n + 1$ è un numero pari (n numero naturale), puoi decidere se n è pari o dispari?

Se $n^3 + 2n + 1$ è un numero pari, allora il numero $n^3 + 2n$, ottenuto sottraendo 1 al numero di partenza, è dispari. $2n$ è un numero pari per ogni n naturale quindi il numero n^3 , ottenuto sottraendo a $n^3 + 2n$ un numero pari, è dispari. Le potenze (con esponente naturale) di n sono pari se e solo se n è pari e dispari se e solo se n è dispari, quindi nel nostro caso n è dispari.

L'insieme dei numeri interi \mathbb{Z}

Definizione

*I numeri interi o interi relativi sono i numeri $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, ovvero i numeri naturali con i loro **opposti** (ovviamente 0 coincide con il suo opposto). Il simbolo che denota l'insieme dei numeri interi è \mathbb{Z} .*

Proprietà

- L'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} è infinito.
- L'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} è **chiuso** per le operazioni di somma algebrica (addizione e sottrazione) e prodotto. Ad esempio:
 $-2 + 5 = -2 - (-5) = 3 \in \mathbb{Z}$, $(-3) \cdot (-4) = 12 \in \mathbb{Z}$.
- L'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} non è chiuso per le operazioni di divisione ed elevamento a potenza. Ad esempio: $(-3) : 4 = -0.75 \notin \mathbb{Z}$,
 $2^{-2} = (1/2)^2 = 1/4 = 0.25 \notin \mathbb{Z}$.
- 0 è l'**elemento neutro** per l'addizione e 1 quello per il prodotto.

L'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q}

- **Numeri razionali:** numeri che è possibile esprimere attraverso frazioni a/b di numeri interi, con il denominatore b diverso da 0. L'insieme dei numeri razionali viene indicato con \mathbb{Q} .
- I seguenti sono numeri razionali (i numeri interi sono razionali):

$$1, \quad -2, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{7}{2}, \quad -\frac{23}{25}$$

- Esistono infinite frazioni che rappresentano lo stesso numero razionale: ad esempio $3/4$, $9/12$, $21/28$ rappresentano il numero 0.75 , e ne potremmo trovare infinite altre. Due numeri razionali, espressi dalle frazioni a/b e c/d , sono uguali quando si ha $ad = cb$.
- I numeri razionali possono essere espressi in forma frazionaria o in forma decimale, con un numero finito di cifre decimali o con un numero infinito ma periodico: $0, \bar{1} = 0,11111\dots$. Non sempre però si incontra uno sviluppo decimale finito o periodico, pensiamo ad esempio alla misura della diagonale di un quadrato di lato unitario.

Potenze - Esponenti interi

Definizione

Siano x e y due numeri razionali diversi da 0, m ed n interi positivi. Elevare il numero x alla potenza m significa moltiplicare x per se stesso m volte: per convenzione $x^0 = 1$ per ogni valore $x \neq 0$.

Attenzione: questa definizione vale anche se $x, y \in \mathbb{R}$.

Proprietà fondamentali

a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

b) $x^m : x^n = x^{m-n}$

c) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

d) $(xy)^m = x^m y^m$

e) $(x/y)^m = x^m / y^m$

f) $x^{-m} = 1/x^m$

Potenze - Esponenti razionali

È possibile estendere il concetto di potenza ad esponenti razionali.

Definizione

Dati un intero m , un intero positivo n e supposto $x > 0$ si ha che

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Esempi

$$5^{2/3} = \sqrt[3]{25} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{3/5} = \sqrt[5]{\frac{1}{8}} \qquad 2^{2/4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$$

- Affinché la potenza $x^{m/n}$ sia definita per qualunque frazione m/n , la base x deve essere una quantità positiva.
- Per gli esponenti razionali valgono le stesse proprietà viste per gli esponenti interi.