LEZIONE 18 OTTOBRE

ESERCIZIO 21

$f: [0, \infty) \to [0, \infty)$

- Se $x = 0$ allora y è zero $\quad f(0) = 0$
- f è crescente
- Esiste una soglia L tale che $f(x) \leq L$ per ogni x

(possiamo anche osservare che una concentrazione è sempre minore o uguale a 1, quindi $L \leq 1$)

$f(x) = x \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = e^{-x} - 1 \qquad \ell(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$

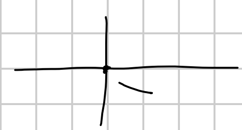
$m(x) = 1 - e^{-x}$

$f(0) = 0$
crescente
$f(x) \leq L$

- $f(x) = x$ $\qquad f(0) = 0$
  f è crescente
  ma $f(x) \leq L$ non è verificato.

- $g(x) = x^2 \qquad [0, +\infty) \to [0, +\infty)$
  - $g(0) = 0$
  - è crescente
  - ma $g(x) \leq L$ non è verificato

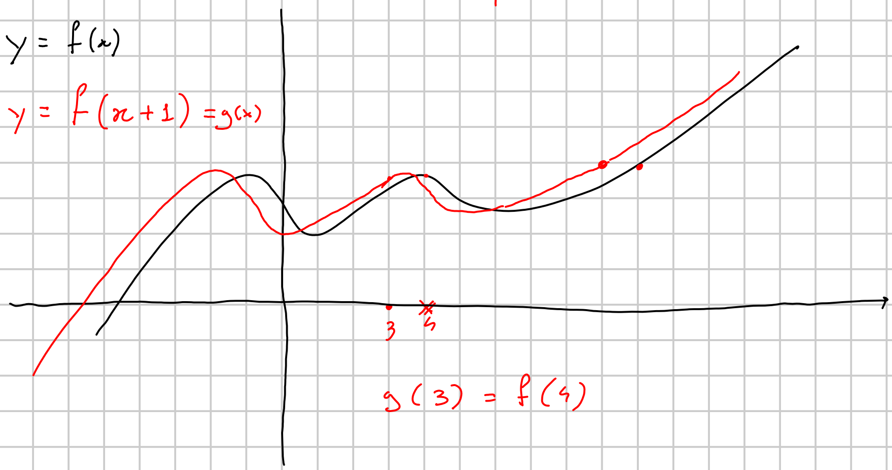
- $h(x) \quad e^{-x} - 1$
  - $h(0) = e^0 - 1 = 0$
  - Per $x > 0 \qquad -x < 0$ quindi $e^{-x} < 1$
    e quindi $e^{-x} - 1 < 0$

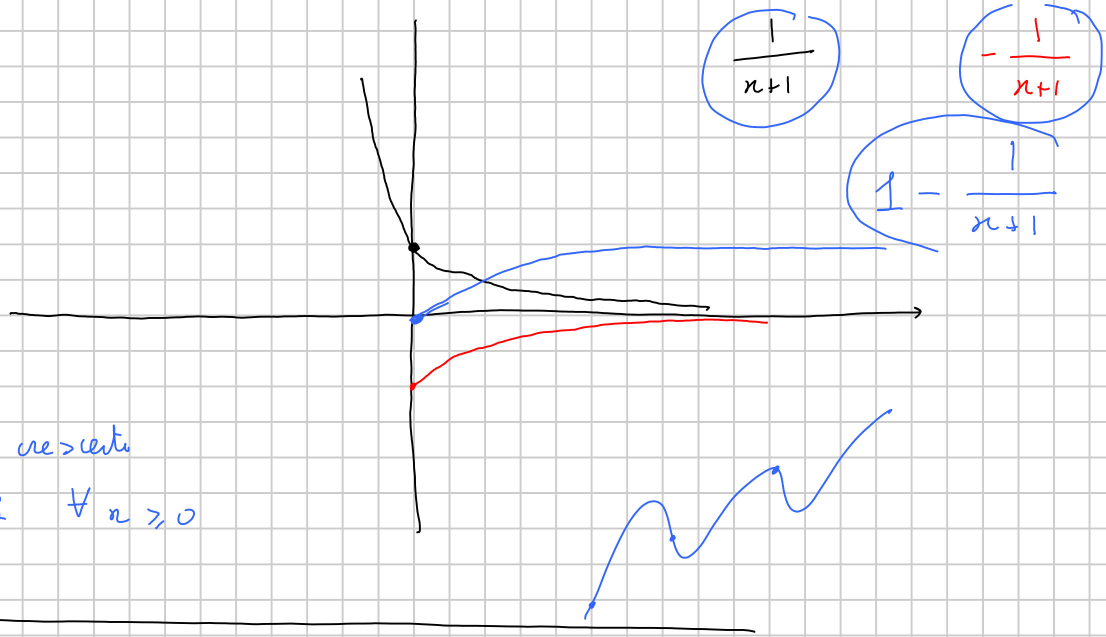


non è neppure una funzione a valori positivi

$\ell(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$

- $\ell(0) = 1 - \dfrac{1}{1} = 0$
- ℓ è crescente





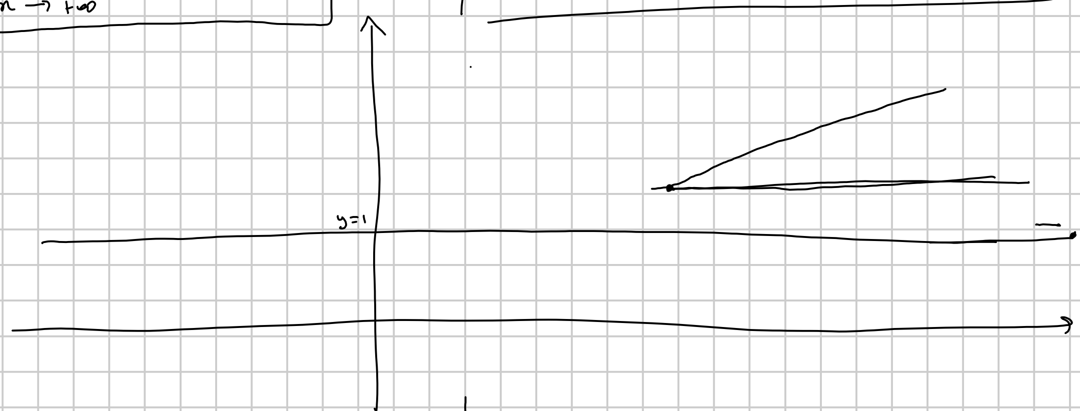
l è crescente

$l(x) \leq 1 \quad \forall x \geq 0$

$f(x)$ è crescente

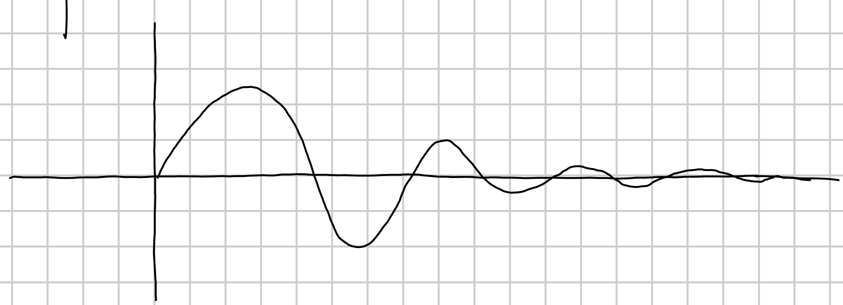
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

allora per ogni x $f(x) \leq 1$



$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$



$m(x) = 1 - e^{-x}$

- $m(0) = 0$ $\quad 1 - e^{-0} = 1 - 1 = 0$ VA BENE

- è crescente: devo far vedere che se $\boxed{x_1 < x_2}$ allora $\boxed{m(x_1) < m(x_2)}$

$\cancel{1} - e^{-x_1} < \cancel{1} - e^{-x_2}$ è equivalente a $e^{-x_1} > e^{-x_2}$

$\qquad\qquad e^{x_2} \qquad e^{x_2}$

è equivalente a $e^{x_2} \cdot e^{-x_1} > 1$ ovvero $e^{\underbrace{x_2 - x_1}} > 1$

perché $z = x_2 - x_1 > 0$ $\quad e^z > 1$. Quindi è crescente.

- $m(x) \leq 1$ per ogni x infatti per ogni x, $e^{-x} > 0$

e quindi $1 - e^{-x} < 1$

ESERCIZIO 24

$$f(x) = 3 - \underbrace{(e^x - 1)^2 (e^x + 1 + x^2)}$$

Calcolare il punto di massimo e il valore massimo.

OSSERVAZIONE

$$\underbrace{(e^x - 1)}^2 (e^x + 1 + x^2) \geq 0 \quad \text{per ogni } x$$

questo è un quadrato

e questo è la somma di tre numeri positivi.

$e^x + 1 + x^2 \geq 1$ per ogni x.

inoltre $(e^x - 1)^2 (e^x + 1 + x^2) = 0$ se e solo se $e^x - 1 = 0$

ovvero $e^x = 1$ ovvero $x = 0$.

$$f(x) = 3 - (e^x - 1)^2 (e^x + 1 + x^2) \leq 3$$

inoltre $f(x) = 3$ se e solo se $(e^x - 1)^2 (e^x + 1 + x^2) = 0$

ovvero per $x = 0$.

Quindi $\underline{f(0) = 3}$ e $\underline{f(x) \leq 3}$ per ogni x.

QUINDI 0 È UN PUNTO DI MASSIMO

E 3 È IL VALORE MASSIMO.

ESERCIZIO 25

$$f(x) = e^{x} + e^{-x} - 5$$

• $f(x) = 0$ $\qquad e^{x} + e^{-x} - 5 = 0$

moltiplico per e^{x} $\qquad e^{x} e^{x} + e^{x} e^{-x} - 5e^{x} = 0$

$$(\underbrace{e^{x}}_{})^{2} - 5e^{x} + 1 = 0$$

Se io chiamo $u = e^{x}$

$$u^{2} - 5u + 1 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 = 21$$

$$u_1 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \sim 4,5 \qquad u_2 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \sim 0,5$$

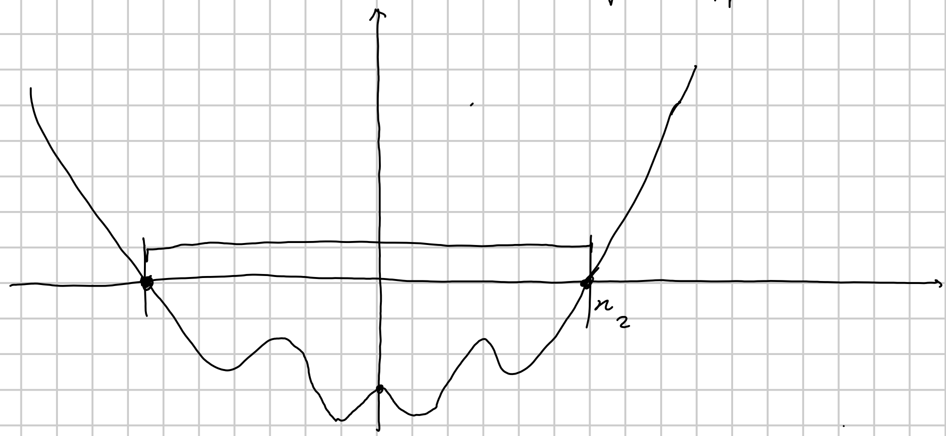
$$\boxed{e^{x} = 4,5} \qquad e^{x} = 0,5$$

Esiste x_1 tale che $e^{x_1} = 4,5$ e un x_2 tale che $e^{x_2} = 0,5$

La funzione non ha massimo infatti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^{x}}_{\to +\infty} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \underbrace{- 5}_{\to -5} = +\infty$$

PROVIAMO A FARE UN GRAFICO DI f approssimativo



$$f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} - 5 = e^{-x} + e^{x} - 5 = f(x)$$

$$f(0) = 1 + 1 - 5$$

$$f(x) = a^{x} \qquad a > 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{x}$$

AVEVAMO VISTO

CHE PER $a > \cancel{0}1$ È CRESCENTE

$a < 1$ È DECRESCENTE

$$\lim_{x \to +\infty} a^{x} = \begin{cases} +\infty & x \quad a > 1 \\ 0 & x \quad a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^{x} = \begin{cases} 0 & x \quad a > 1 \\ +\infty & x \quad a < 1 \end{cases}$$

SE $\boxed{a > 1}$ LA FUNZIONE ESPONENZIALE "CRESCE" DI PIÙ DELLE FUNZIONI POLINOMIALI x^{n}:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty \qquad \text{per esempio} \qquad \frac{e^{x}}{x} \qquad \frac{e^{x}}{x^{100}}$$

MENTRE PER x CHE TENDE A MENO INFINITO

$$\lim_{x \to -\infty} e^x x^n = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{e^x} \; \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{x} = 0$$

FUNZIONI BIGETTIVE E FUNZIONE INVERSA

$$f: A \longrightarrow B$$

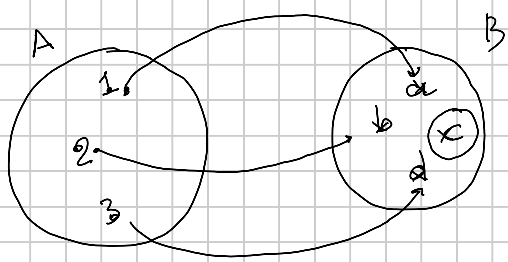
una funzione, dico che è bigettiva se

1) f manda elementi distinti in elementi distinti
ovvero se a_1 e $a_2 \in A$, e $a_1 \neq a_2$ allora
$f(a_1) \neq f(a_2)$

2) Per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Esempi

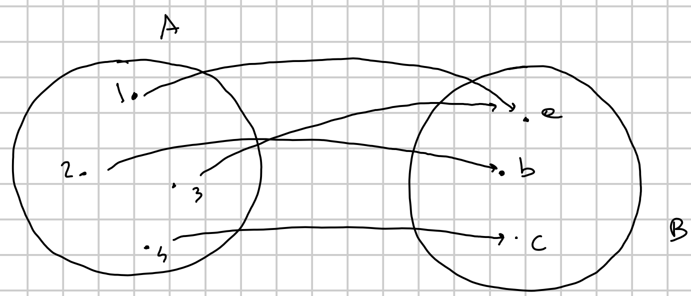
$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{a, b, c, d\}$



QUESTA funzione VERIFICA LA 1)
MA NON VERIFICA LA 2) INFATTI c non è l'immagine di nessun elemento.

Esempio

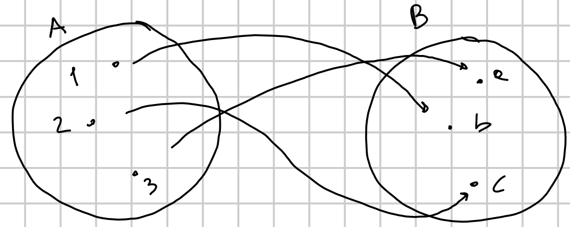
$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{a, b, c\}$



QUESTA FUNZIONE VERIFICA LA PROPRIETÀ 2
MA NON VERIFICA LA PROPRIETÀ 1) INFATTI $f(1) = f(3) = a$

ESEMPIO

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b, c\}$



QUESTA È BIGETTIVA

$f: A \to B$

OSSERVAZIONE

Le proprietà 1) e 2) SI POSSONO RIASSUMERE NELL'UNICA FRASE

PER OGNI $b \in B$ ESISTE UN UNICO ELEMENTO $a \in A$ TALE CHE $f(a) = b$.

DEFINIZIONE

Sia $f: A \to B$ una funzione bigettiva

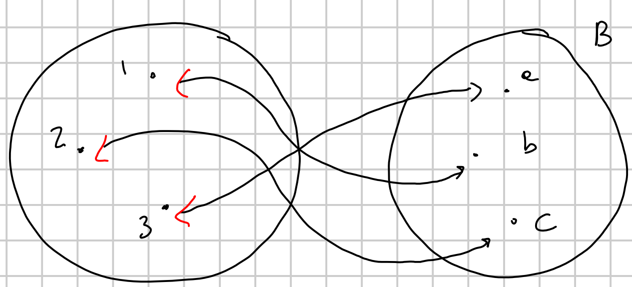
Definisco una funzione $g: B \to A$ che si chiama funzione inversa di f e si indica con f^{-1} CHE È DEFINITA NEL SEGUENTE MODO

$$g(b) = a \quad \text{se e solo se} \quad f(a) = b.$$

ovvero dato $b \in B$, $g(b)$ è l'unico elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Esempio

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b, c\}$



$g(a) = 3$

$g(b) = 1$

$g(c) = 2$

<u>Esempio</u> $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 3x+1$

voglio far vedere che f è bigettiva e voglio calcolare l'inversa.

$(b \in B)$

DEVO far VEDERE CHE PER OGNI $y \in \mathbb{R}$ ESISTE UN UN UNICO $x \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\boxed{f(x) = y}$.

$$y = 3x+1$$

ovvero $\quad y - 1 = 3x$

ovvero $\quad \boxed{x = \frac{y-1}{3}}$

QUINDI DATO $y \in \mathbb{R}$ L'EQUAZIONE $f(x) = y$ HA COME UNICA SOLUZIONE $\boxed{x = \frac{y-1}{3}}$.

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}$$

$\boxed{f^{-1}(y) = x}$ se e solo se $\boxed{f(x) = y}$

<u>Esempio</u> $\quad f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

NON VERIFICA NÉ LA 1) NÉ LA 2)

$f(1) = f(-1) = 1$

$x^2 = -1 \quad f(x) = -1$ NON HA SOLUZIONE

<u>Esempio</u> $\quad h: [0, +\infty) \to [0, +\infty) \quad h(x) = x^2$

h È BIGETTIVA

INFATTI PER OGNI $y \geq 0$ ESISTE UN UNICO $x \geq 0$ TALE CHE $x^2 = y$

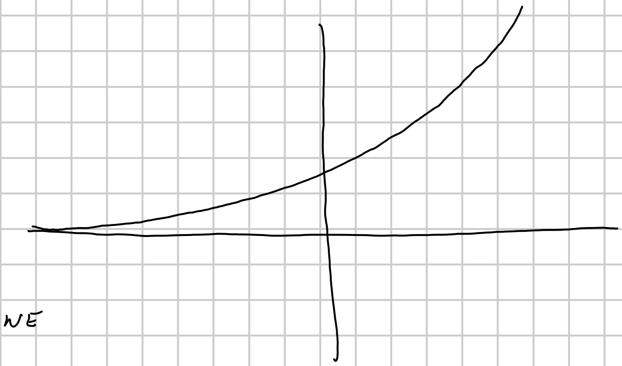
ED È $x = \sqrt{y}$

$$h^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

ESEMPIO $\qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty) \qquad a \neq 1 \qquad a > 0$

$$f(x) = a^x$$

f è una funzione bigettiva



L'INVERSA DI QUESTA FUNZIONE SI CHIAMA $\log_a y$

$$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a^x : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$$

$\log_a y = x$ se e solo se $a^x = y$