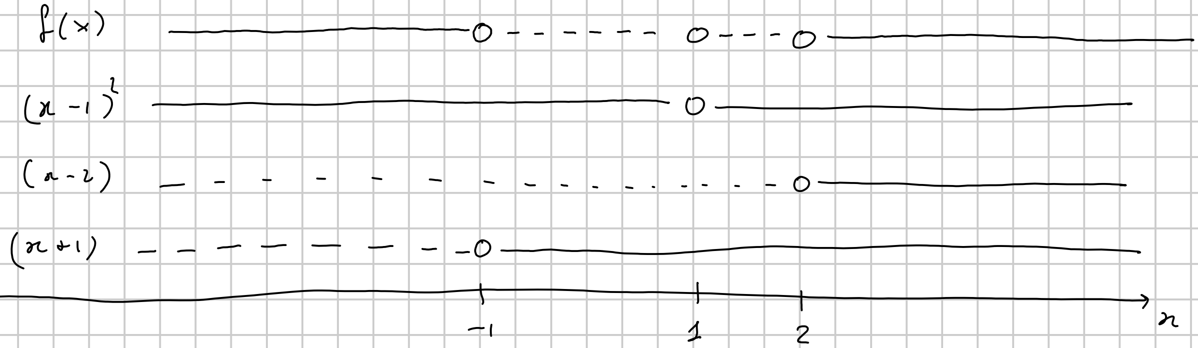
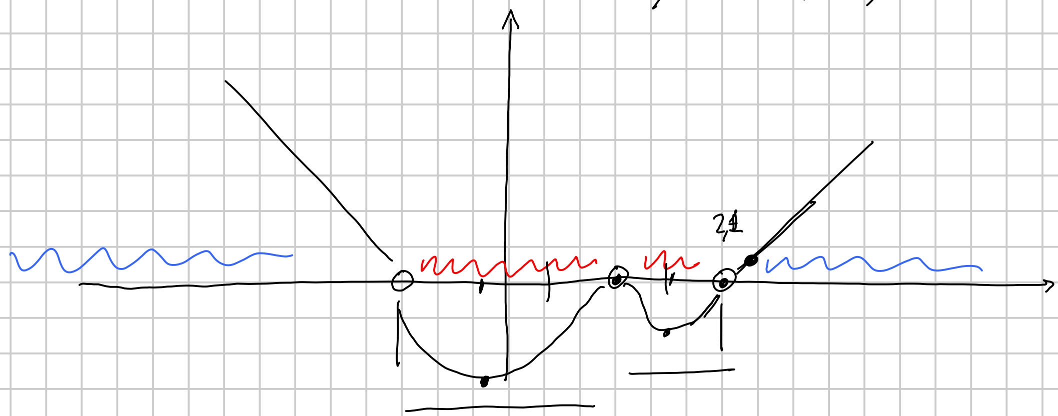
$f(x) = (x-1)^2 \ (x-2) \ (x+1)$



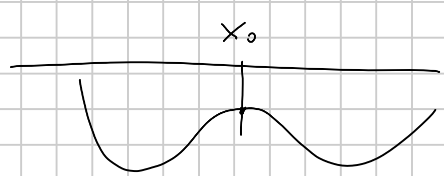
$f(x) > 0$ per $x < -1$ o per $x > 2$

per $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$



$x = 1$ è un punto di massimo locale della fun

infatti x $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ $f(1) = 0 \geq f(x)$



x $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ $f(x_0) \geq f(x)$

OSSERVO CHE SE $-1 < x < 2$ ALLORA $\boxed{f(x) \leq 0}$

(QUESTO LO DEDUCO DALLO STUDIO DEL SEGNO)

SICURAMENTE $0 = f(1) \geq f(x)$ per $2 > x > -1$

$\exists \delta > 0$ tale che x $x_0+\delta > x > x_0-\delta$ ALLORA $f(x) \leq f(x_0)$

$x_0 = 1$ SCELGO $\delta = \frac{1}{2}$ x $\frac{3}{2} > x > \frac{1}{2}$ ALLORA $f(x) \leq 0 = f(1)$

$$f(x) = -x^2 \left(e^{x+x^3} + x^2\right)$$

$x^2 \geq 0$ PER OGNI x

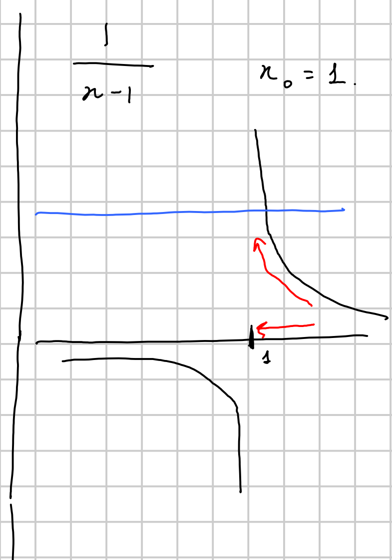
$e^{x+x^2} > 0$

QUINDI $f(x) \leq 0$ per ogni x

INOLTRE $f(0) = 0$ QUINDI 0 È UN PUNTO DI MASSIMO E 0 È IL VALORE MASSIMO

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} \frac{1}{x-1}$$

VOLEVAMO STUDIARE IL COMPORTAMENTO DI f VICINO A $x = 1$.



<u>DEFINIZIONE</u> Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

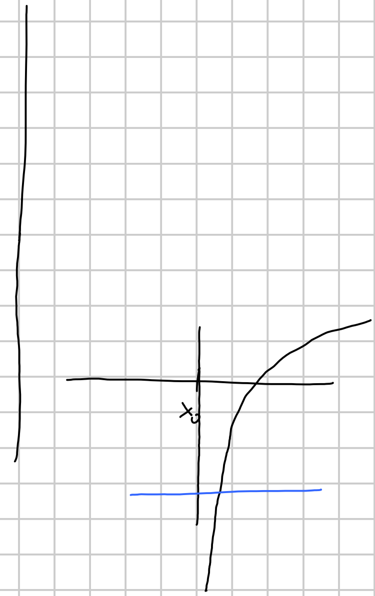
SI CHIAMA IL LIMITE DI $f(x)$ PER x CHE TENDE A x_0 DA DESTRA

DICIAMO CHE TALE LIMITE È $+\infty$

SE PER OGNI M ESISTE UN $\delta > 0$

TALE CHE SE $x_0 < x < x_0 + \delta$ ALLORA

$$f(x) \geq M$$



DICIAMO CHE TALE LIMITE È $-\infty$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

SE PER OGNI M ESISTE UN $\delta > 0$

TALE CHE SE $x_0 < x < x_0 + \delta$ ALLORA

$$f(x) \leq M.$$

DICIAMO CHE TALE LIMITE È UGUALE A L

SE PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE $\delta > 0$

TALE CHE $\underbrace{\text{SE } x_0 < x < x_0 + \delta}_{}$ ALLORA

QUANDO X È VICINO A X_0 (E INOLTRE È DOPO X_0)

$$\underbrace{L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon}_{}$$

$f(x)$ È VICINO A L

L'ERRORE TRA f E L È AL MASSIMO ε.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \\ L \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

ANALOGAMENTE SI DEFINISCE IL LIMITE PER x CHE TENDE A x_0 DA SINISTRA.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \\ L \end{matrix}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

QUESTO È L'ERRORE

x È VICINO A x_0

PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE SE $x_0 - \delta < x < x_0$

ALLORA $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

f è vicino a L.

PER CASA DARE LE ALTRE DUE DEFINIZIONI

ESEMPIO

1) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

2) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

FACCIAMO VEDERE CHE LA SECONDA È VERA

DEVO FAR VEDERE CHE

PER OGNI M ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE SE $-\delta < x < 0$

ALLORA $\frac{1}{x} \leq M$

1° CASO $M \geq 0$: OSSERVO CHE COMUNQUE IO SCELGA δ

$\frac{1}{x} < 0$ PERCHÉ $x < 0$ E $M \geq 0$

SICURAMENTE $\frac{1}{x} < 0 \leq M$

2° CASO $M < 0$: ALLORA LA DISUGUAGLIANZA

$\frac{1}{x} \leq M$

È EQUIVALENTE A $1 \geq Mx$

CHE A SUA VOLTA È EQUIV. A $\boxed{\frac{1}{M} \leq x}$

PER OGNI $M < 0$ ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE SE $-\delta < x < 0$

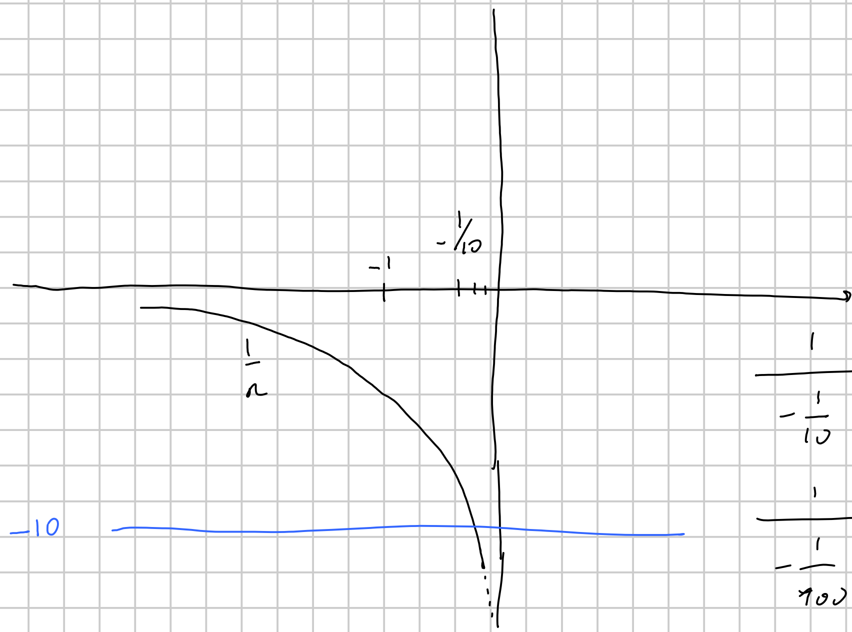
ALLORA $\frac{1}{M} \leq x$

$M = -100$ SE $-\delta < x < 0$ ALLORA $-\frac{1}{100} < x$

POSSO SCEGLIERE $\delta = \frac{1}{100}$

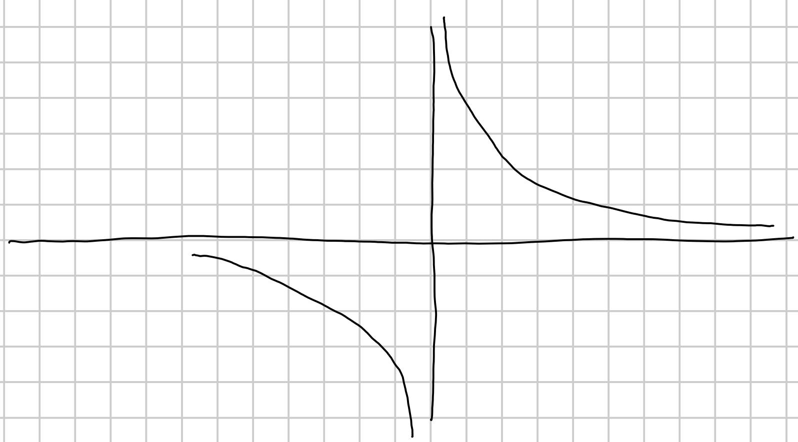
SE $-\frac{1}{100} < x < 0$ ALLORA $-\frac{1}{100} \leq x$

IN GENERALE PER $M < 0$ SCELGO $\delta = -\frac{1}{M}$.



$$\frac{1}{-\frac{1}{10}} = -10.$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{100}} = -100$$



ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

IN QUESTI CASI SI DICE

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

DEFINIZIONE

SE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ L \end{cases}$

DICIAMO CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ L \end{cases}$

SI LEGGE IL LIMITE DI $f(x)$ PER x CHE TENDE A x_0.

FATTO

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = \begin{cases} 0 & \text{SE } \underline{\underline{a > 0}} \\ +\infty & \text{SE } \underline{\underline{a < 0}} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$a = 1$ $\qquad$ $a = -1$

$$\lim_{x \to 0^-} x^n = \begin{cases} 0 & n > 0 \\ -\infty & n < 0 \text{ dispari} \\ +\infty & n < 0 \text{ pari} \end{cases} \quad * \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$n = 1$ $\quad \lim_{x \to 0^-} x = 0$

$n = -1$ $\quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$n = -2$ $\quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$

LINEARI

QUADRATICHE

RAZIONALI

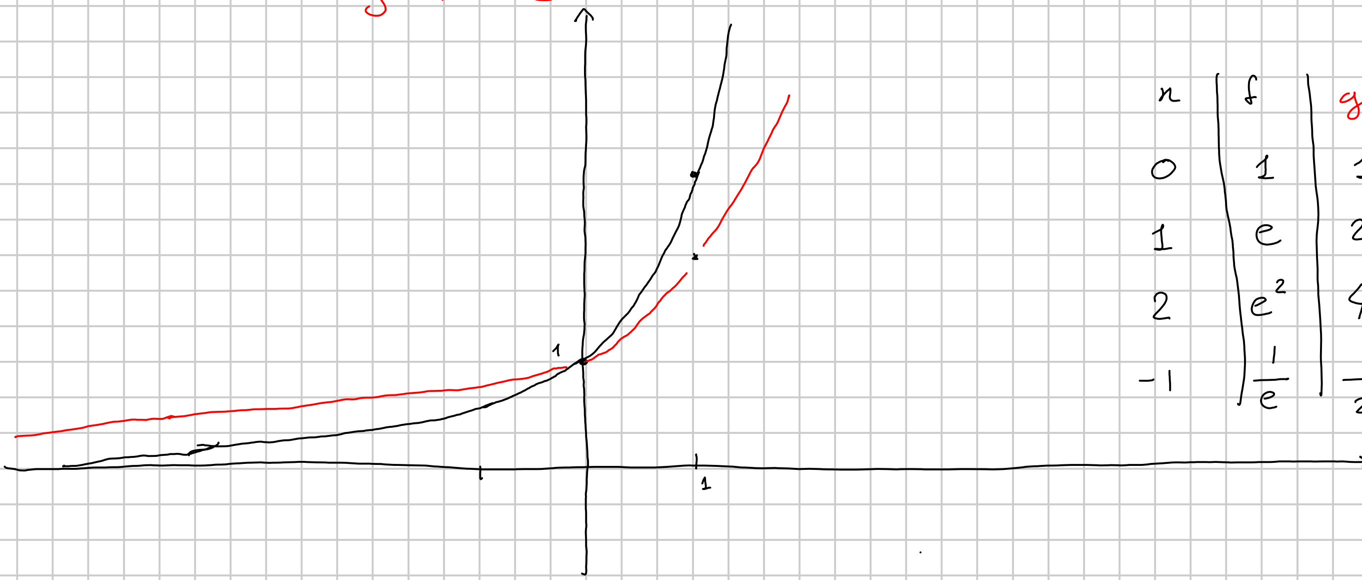
ESPONENZIALI . $f(x) = a^x$ $\qquad 2^x \qquad 3^x$

$a > 0$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

IN PARTICOLARE STUDIEREMO SULLA funzione $f(x) = e^x$

$f(x) = e^x$ $\quad g(x) = 2^x$



x	f	g
0	1	1
1	e	2
2	e^2	4
-1	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2}$

FATTI

f e g sono crescenti

f e g sono sempre positive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} g(x)$$

QUESTE PROPRIETÀ SONO COMUNI A TUTTE LE FUNZIONI

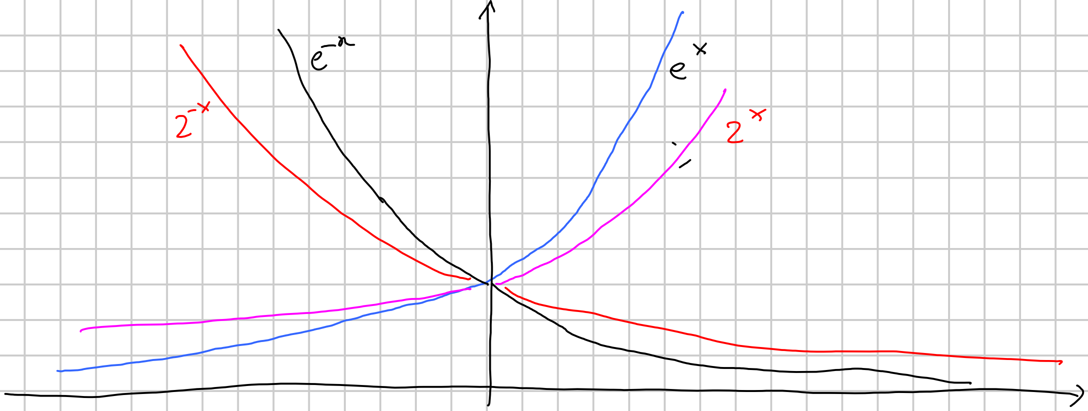
$f(x) = e^x$ CON $e > 1$. $\quad 2^x \quad e^x$

$$f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x \qquad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

$$= \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

SONO COMUNI A TUTTE LE FUNZIONI e^x CON $e<1$

- SONO DECRESCENTI
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ E LO STESSO PER g
- SONO SEMPRE POSITIVE



FATTO

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

QUESTO È VERO SOLO PER e^x.

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$