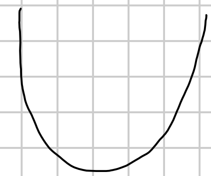
LEZIONE 11 OTTOBRE

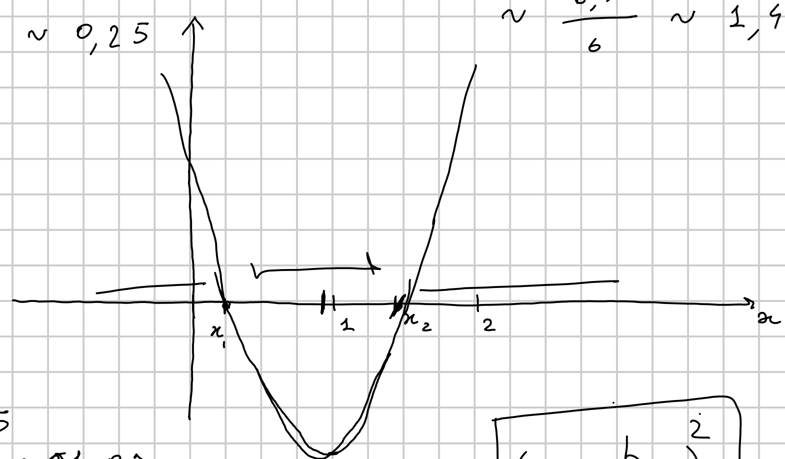
Esercizio 15 $\quad f(x) = 3x^2 - 5x + 1$



$$\Delta = 5^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = 25 - 12 = 13$$

L'equazione $f(x) = 0$ ha soluzione.

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \sim \frac{1,5}{6} \sim 0,25 \qquad x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \sim \frac{8,5}{6} \sim 1,4$$



Il punto di minimo è

$$x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{6} \approx 0,8$$

$$\boxed{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} \qquad x = -\frac{b}{2a}$$

Il valore minimo della funzione

$$f(x_{min}) = 3x_{min}^2 - 5x_{min} + 1 =$$

$$= 3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5\,\frac{5}{6} + 1 = \cancel{3}^{1}\,\frac{25}{\cancel{36}_{12}} - \frac{25}{6} + 1$$

$$= \frac{25 - 50 + 12}{12}$$

$$= -\frac{13}{12}$$

$f(x) > 0$ per $x < x_1 = \frac{5-\sqrt{13}}{6}$ o per $x > x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$

$f(x) < 0$ per $\frac{5-\sqrt{13}}{6} = x_1 < x < x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$

Esercizio $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$

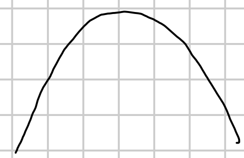
$f(-1) = -4 \qquad f(1) = 2 \qquad f(2) = -1$

$$\begin{cases} f(-1) = a - b + c = -4 \\ f(1) = a + b + c = 2 \\ f(2) = 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = a + c + 4 \\ 2a + 2c + 4 = 2 \\ 4a + 2a + 2c + 8 + c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a + c + 4 \\ a + c = -1 \\ 6a + 3c = -9 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = a + c + 4 \\ a + c = -1 \\ 2a + c = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = a + c + 4 \\ c = -1 - a \\ 2a - 1 - a = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ c = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 1.$$



Esercizio 20 $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

DEFINIRE $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

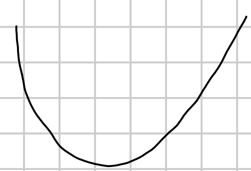
PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE SE $x \leq x_0$

ALLORA $\qquad 2 - \varepsilon \leq f(x) \leq 2 + \varepsilon$

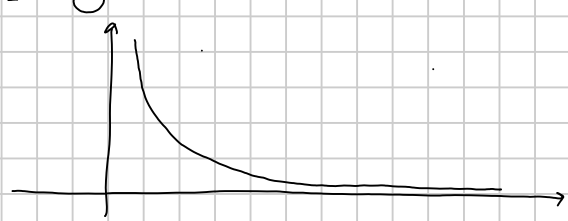
$a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} x^{-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{-1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x^{-2} = 0$$

STANDO ATTENTI VALGONO QUESTE DUE PROPRIETÀ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to +\infty} f(x)}{\lim_{x \to +\infty} g(x)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to +\infty} 3 \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= 0 + \lim_{x \to +\infty} 3 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 + 3 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} x + x^2 = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} x}_{= +\infty} + \underbrace{\lim_{x \to +\infty} x^2}_{= +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} x^2}_{= +\infty} - \boxed{\underbrace{\lim_{x \to +\infty} x}_{= +\infty}}$$

$$= +\infty$$

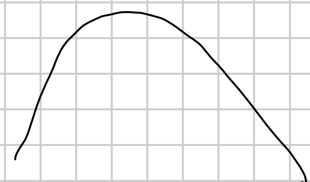
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to +\infty} x^2}_{= +\infty} \; \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)}_{= 1} = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} 1}_{= 1} - \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{X}}_{= 0} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x - x^2 = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} x}_{+\infty} - \underbrace{\lim_{x \to +\infty} x^2}_{+\infty}$$



$$\lim_{x \to +\infty} x - x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to +\infty} x^2}_{= +\infty} \; \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)}_{= -1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}_{= 0} - \underbrace{\lim_{x \to +\infty} 1}_{= 1} = 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 5x^2 + 1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n^3 \lim_{n \to +\infty} \left(\underset{\downarrow \atop 1}{1} - \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{5}{n}} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{x^3}} \right)$$

$$\underset{+\infty}{\shortparallel}$$

$$= \left(\underbrace{\lim_{n \to +\infty} n^3}_{= +\infty} \right) \left(\underbrace{\lim_{n \to +\infty} 1}_{=1} - \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{5}{n}}_{=0} + \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x^3}}_{=0} \right) = +\infty$$

$$= 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 3x + 2} \overset{?}{=} \frac{\overset{+\infty}{\overset{\shortparallel}{\lim_{n \to +\infty} n^2 + n + 1}}}{\underset{+\infty}{\underset{\shortparallel}{\lim_{n \to +\infty} 2x^2 + 3x + 1}}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\cancel{x^2} \left(2 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \longrightarrow 1}{\lim_{n \to +\infty} \underset{\downarrow \atop 2}{2} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{3}{x}} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{2}{x^2}}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} 1}_{} + \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x}}_{} + \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x^2}}_{} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{n^3 + n + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{n^{\cancel{3}} \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x} \left[\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \right] \longrightarrow 1/1 = 1$$

$$\underbrace{\qquad}_{0} \qquad \underbrace{1 \quad 0 \quad 0}$$

$$= 0 \cdot 1 = 0$$

INVESTIAMO DEI SOLDI S_0

LA BANCA 1 IN UN ANNO DA IL 100 % DI INTERESSE

$$S_1 = S_0 + \frac{100}{100} S_0 = (1+1) S_0 = 2 S_0$$

LA BANCA 2 OGNI SEI MESI DA IL 50 % DI INTERESSE.

$$S_{6\text{ mesi}} = S_0 + \frac{50}{100} S_0 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) S_0 = \frac{3}{2} S_0$$

$$S_{1\text{ anno}} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 S_0 = \underbrace{\frac{9}{4}} S_0$$

BANCA 3 CHE OGNI 4 MESI DA IL $33,\bar{3}$ % DI INTE

$$S_{4\text{ mesi}} = S_0 + \frac{1}{3} S_0 = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3}\right)} S_0$$

$$S_{1\text{ anno}} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 S_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 S_0 = \frac{64}{27} S_0$$

BANCA x DOPO $\frac{1}{x}$ anni MI DA $\frac{100}{x}$ % DI INTERESSE.

$$S_{\frac{1\text{ anno}}{x}} = S_0 + \frac{100}{100x} S_0 = \left(1 + \frac{1}{x}\right) S_0$$

$$S_{1\text{ anno}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x S_0$$

DEFINIZIONE $\quad e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

ED È UN NUMERO CHE È CIRCA 2,7

TORNIAMO ALLE FUNZIONI RAZIONALI

Esempio

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

OSSERVAZIONE $\quad f$ NON È UNA FUNZIONE DA $\mathbb{R}$ A $\mathbb{R}$

PERCHÉ PER $x = 1$ LA FORMULA CHE DEFINISCE f NON HA SENSO $\quad f(1) = \frac{1}{0}$ E ANCHE PER $x = -1$

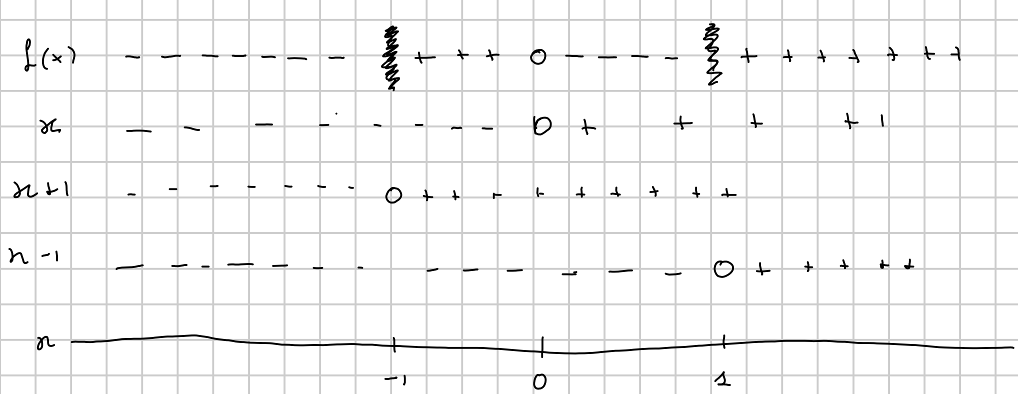
$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f : (-\infty\ -1) \cup (-1\ \ 1) \cup (1\ +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

VOGLIAMO CAPIRE COME È FATTA LA FUNZIONE ATTORNO A QUESTI PUNTI IN CUI NON È DEFINITA, VICINO $x = -1$ E VICINO $x = 1$.

STUDIAMO INTANTO IL SEGNO

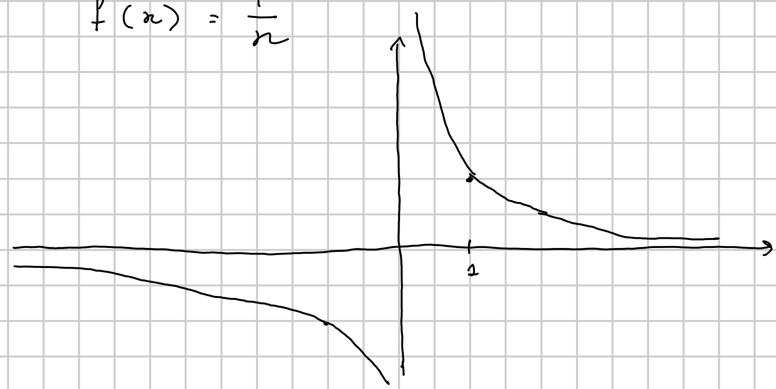
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$



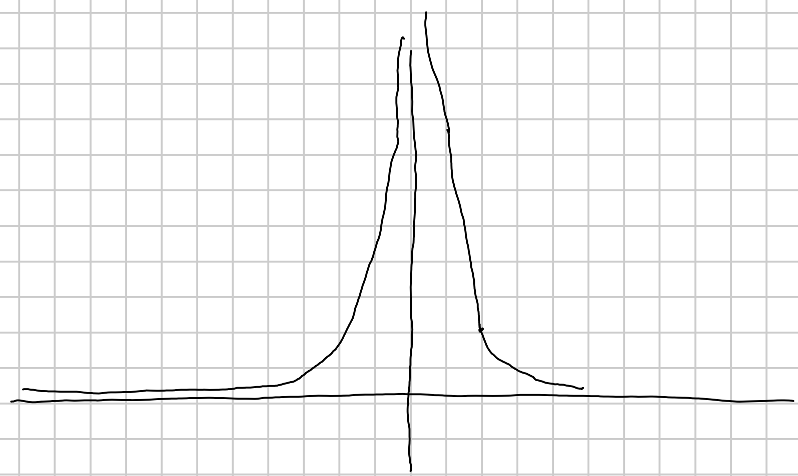
IN PARTICOLARE VICINO a $x=1$ e $x=-1$

CAMBIA SEGNO.

L'ESEMPIO FONDAMENTALE NELLO STUDIO DI QUESTO GENERE DI PROBLEMI È $f(x) = \frac{1}{x}$



UN ALTRO ESEMPIO È $f(x) = \frac{1}{x^2}$



QUANDO STUDIO UNA FUNZIONE RAZIONALE VICINO AI PUNTI NEI QUALI NON È DEFINITA MI TROVO SEMPRE IN UN CASO SIMILE A UNO DI QUESTI DUE.

NEL NOSTRO ESEMPIO VEDIAMO DI CAPIRE COSA SUCCEDE ATTORNO A $x=1$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \overset{1/2}{\frac{x}{x+1}} \; \boxed{\frac{1}{x-1}}$$

$$y = \frac{1}{x-1}$$