LEZIONE 20 DICEMBRE

ES. 72

$f: [1,5] \to \mathbb{R}$

a) RISOLVERE L'EQUAZIONE

$f(x)=2$

$x = 2,5$ e $x=4$

b) L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANG. NEL PUNTO DI ASCISSA $x=3$

NEL PUNTO $P=(3,3)$ LA RETTA TANGENTE HA

EQUAZIONE $y = 3$

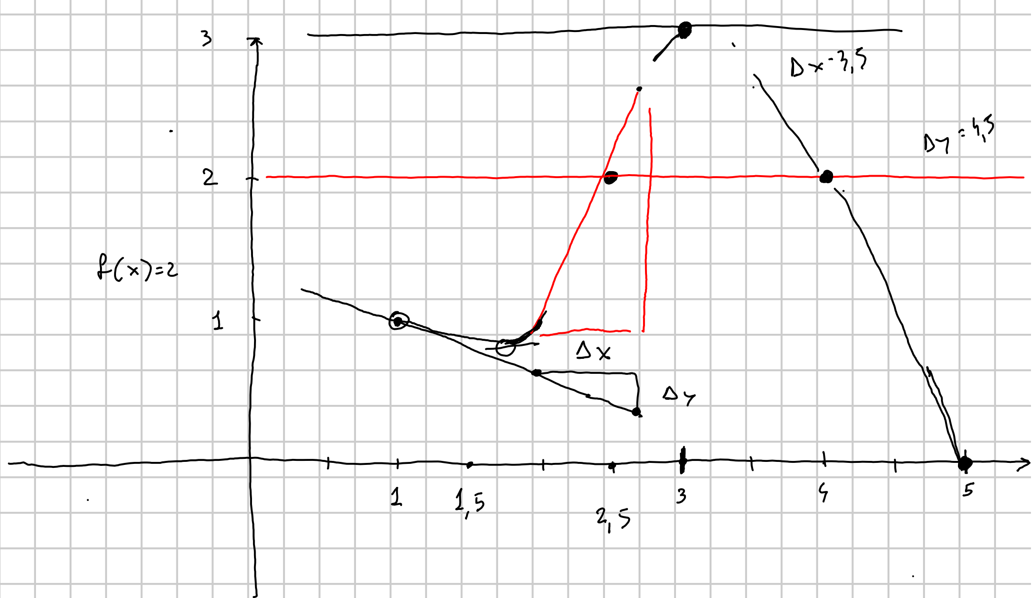
c) I PUNTI DI MASSIMO E MINIMO DI f

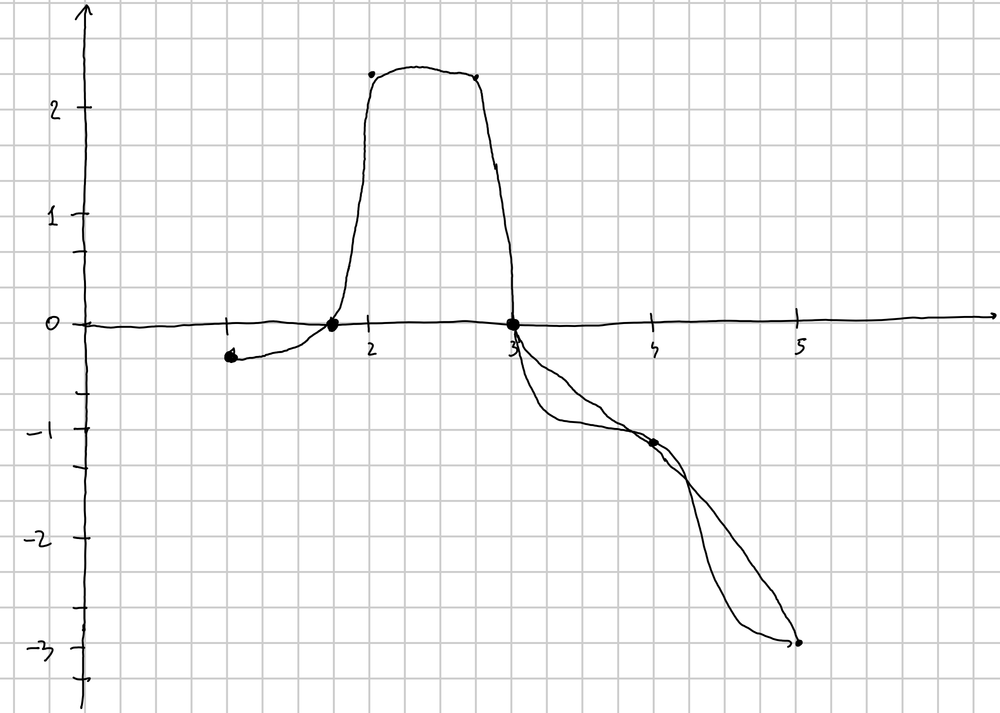
IN $x = 3$ la funzione ha massimo

IN $x = 5$ " " " ha minimo.

d) Si tracci un grafico approssimativo della derivata.

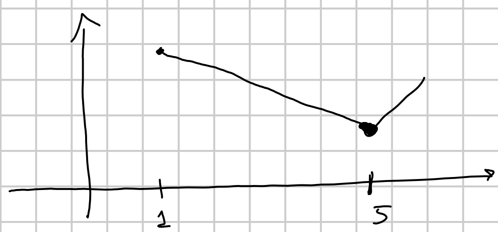
x	$f'(x)$
1	$-\frac{1}{3}$
1,75	0
TRA 2 e 2,75	$\sim 7/3$ ↗
3	0
4	$\sim -\frac{4,5}{3,5} = -\frac{9}{7}$
5	~ -3

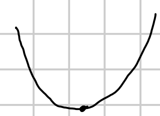




OSSERVAZIONE $x = 5$ È UN PUNTO DI MINIMO MA $f'(5) \neq 0$.

PERCHÉ LA FUNZIONE È DEFINITA SOLO NELL'INTERVALLO $[1, 5]$





e) $g : \underline{[-4, 0]} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad g(x) = f(1-x) + 1$

SI DISEGNI UN GRAFICO ACCURATO DI g.

<u>OSS</u> LA FUNZIONE g è "ben definita"

cioè per $\underline{-4 \leq x \leq 0}$ $\qquad 0 \leq -x \leq 4$

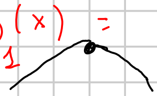
$1 \leq \underline{1-x} \leq 5$

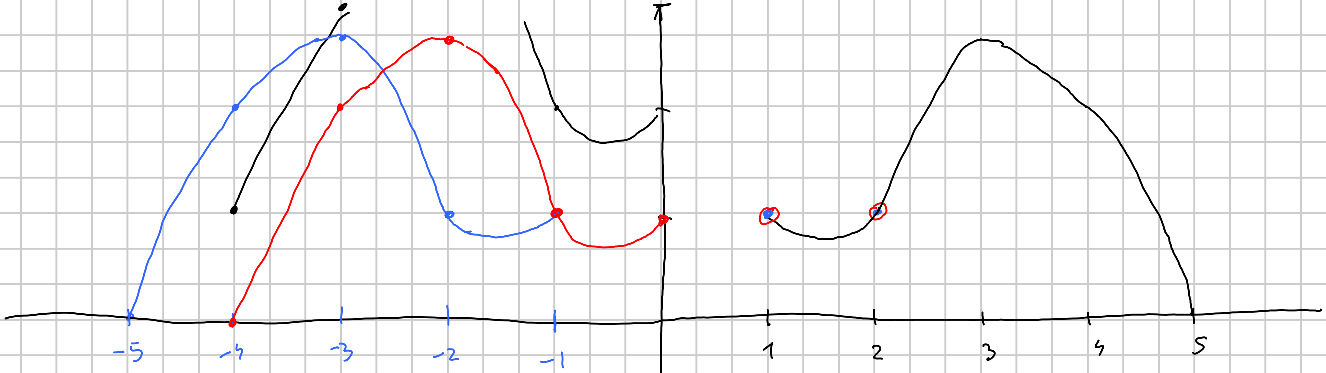
QUINDI HA SENSO CALCOLARE $f(1-x)$

$\underline{f : [1, 5] \longrightarrow \mathbb{R}.}$

SIA $\underline{h(x)} = f(\underbrace{-x})$ $\qquad h : [-5, -1] \longrightarrow \mathbb{R}$

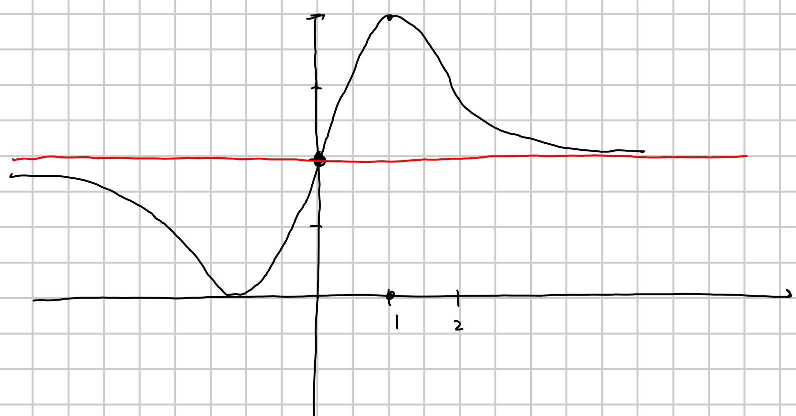
$g_1(x) = f(1-x)$ $\qquad g_1 : [-4, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad g(x) = f(1-x) + 1$





x	$g(x) = f(-1-x)+1$
-4	1
-3	3
-2	4
-1	2
0	2

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



NO $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ //

NO * $f(x) = ax + b$ //

$f(x) = \dfrac{ax}{x^2+1} + b$.

NO $f(x) = a b^x + c$ $\quad b > 1 \quad x \to +\infty$

DIVERGE

$$f(x) = \frac{ax}{x^2+1} + b$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{x^2+1} + b = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \frac{a\cancel{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} + b$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \frac{a}{1 + \frac{1}{x}} + b = \underline{\underline{b.}}$$

$\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{1}{x} \to 0$

DAL GRAFICO POSSIAMO IPOTIZZARE CHE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

E DAL CONTO CHE ABBIAMO APPENA FATTO RICAVIAMO

$b = 2$.

ALTERNATIVAMENTE

$$f(x) = \frac{ax}{x^2+1} + b \qquad f(0) = b$$

DAL GRAFICO $f(0) = 2$

$$f(x) = \frac{ax}{x^2+1} + 2$$

DAL GRAFICO VEDIAMO CHE $f(1) = 4$

E RICAVIAMO $4 = f(1) = \frac{1}{1+a} + 2$

$$\frac{a}{1+1} + 2 = 4 \qquad \frac{a}{2} + 2 = 4 \qquad \text{OVVERO} \quad \frac{a}{2} = 2$$

OVVERO $a = 4$.

1° LA FUNZIONE È DELLA FORMA $f(x) = \frac{ax}{x^2+1} + b$

[OPPURE LA FUNZIONE CERCATA È $f(x) = \frac{4}{x^2+1} + 2$].

INFATTI LE ALTRE FUNZIONI PROPOSTE DALL'ESERCIZIO DIVERGONO PER x CHE TENDE A $+\infty$ E A $-\infty$, NEI PRIMI DUE CASI, O PER x CHE TENDE A $+\infty$ O A $-\infty$ NEL CASO DELL'ESPONENZIALE.

2° DETERMINO a e b DAL GRAFICO

PER DETERMINARE a e b OSSERVO CHE $f(0) = 2$ E $f(1) = 4$

RICAVO QUINDI LE EQUAZIONI

$$f(0) = \frac{a \cdot 0}{0+1} + b = b = 2 \qquad f(1) = \frac{a}{1+1} + b = 4$$

DA CUI $b = 2$ E $\frac{a}{2} + 2 = 4$ OVVERO $a = 4$.

QUINDI $$\boxed{f(x) = \frac{4x}{x^2+1} + 2}$$

ES. 74

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = ax - \cos(x)$$

PER QUALI VALORI DI a LA FUNZIONE HA PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE.

- PER CAPIRE SE LA FUNZIONE HA PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE STUDIO LA DERIVATA.

$$f'(x) = a - (-\sin x) = a + \sin x$$

SE f HA UN PUNTO DI MASSIMO O MINIMO LOCALE x ALLORA $f'(x) = 0$. QUINDI SE f HA PUNTI DI MASSIMO O MINIMO LOCALE L'EQUAZIONE $\underline{f'(x) = 0}$ DEVE AVERE SOLUZIONE.

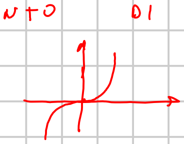
QUINDI STUDIO QUANDO L'EQUAZIONE

$$a + \sin(x) = 0 \qquad \boxed{\sin(x) = -a}$$

HA SOLUZIONE. E OSSERVO CHE HA SOLUZIONE PE $-1 \leq a \leq 1$

RICAVIAMO CHE PER $a < -1$ O PER $a > 1$ f NON HA PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE

OSS IN GENERALE NON È VERO CHE SE $f'(x) = 0$ ALLORA x È UN PUNTO DI MASSIMO E MINIMO LOCALE.

(PER. ES $f(x) = x^3$  $f'(0) = 0$.)

NON POSSIAMO DEDURRE CHE SE $-1 \leq a \leq 1$ ALLORA f HA PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE.

SE $a = 1$ $\qquad f'(x) = \underline{1 + \sin(x)}$

$$f'(x) = 0 \quad \text{SE} \quad x = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{ALTRIMENTI}$$

QUINDI f è crescente

$$2k\pi + \beta < x < 2\pi + \alpha + 2k\pi.$$

E IN PARTICOLARE NON HA PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE

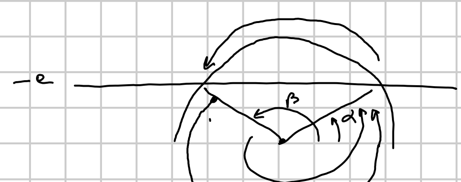
SE $a = 1$ IN MODO SIMILE f È DECRESCENTE

QUINDI f NON HA PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE

NEL CASO RIMANENTE $-1 < a < 1$ DIMOSTRO CHE f HA PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE.

STUDIAMO IL SEGNO DI $f'(x)$

QUANDO
- $f'(x) > 0 \qquad \sin(x) > -a$
- $f'(x) = 0 \qquad \sin(x) = -a \qquad -1 < -a < 1$
- $f'(x) < 0 \qquad \sin(x) < -a$



$f' = 0$ PER $\sin(x) = -a$ OVVERO PER $\underline{x = \alpha + 2k\pi \quad o \quad x = \beta + 2k\pi}$

$\underline{f' > 0}$ PER $\sin(x) > -a$ OVVERO PER $2k\pi + \underline{\alpha < x < \beta + 2k\pi}$

$f' < 0$ PER $\sin(x) < -a$ OVVERO PER $2k\pi + \beta < x < \alpha + 2\pi + 2k\pi$

PER ESEMPIO $\begin{cases} f'(\beta) = 0 \\ f'(x) > 0 \quad \text{PER} \quad \alpha < x < \beta \end{cases}$

) $f'(x) < 0$ $\quad \beta < x < \alpha + 2\pi$ $\searrow$

QUINDI β È UN PUNTO DI MASSIMO LOCALE

E SIMILMENTE α " " " " MINIMO LOCALE

QUINDI PER $-1 < a < 1$ ESISTONO PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE.