LEZIONE 6 DICEMBRE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

STATE CERCANDO UNA FUNZIONE $y(t)$ CHE RISOLVE UN'EQUAZIONE CHE COINVOLGE, t, $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$... . Per esempio

L'EQUAZIONE →

CONDIZIONI INIZIALI →

- $\begin{cases} y'(t) = F(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ $\qquad y' = f(t) \qquad y'(t) = a\,y(t) + b$

- $\begin{cases} y''(t) = F(t, y, y') \\ y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_0' \end{cases}$ $\qquad y'' = \text{costante}$

ESERCIZIO 64

Si trovi una funzione f tale che

$$\begin{cases} f'(t) = 1 + t\log(t) \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

QUESTA EQUAZIONE DIFFERENZIALE È PARTICOLARE PERCHÉ STIAMO CALCOLANDO LA PRIMITIVA DI $1 + t\log(t)$

Definiamo $\quad g(t) = \displaystyle\int_1^t 1 + x\log(x)\,dx =$

$$= \int_1^t 1\,dx + \int_1^t \underset{f}{x}\,\underset{G}{\log x}\,dx = \qquad F = \frac{1}{2}x^2 \qquad G' = \frac{1}{x}$$

$$= t - 1 + \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \log(x)\right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{2}x^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$= t - 1 + \frac{1}{2}t^2\log t - \frac{1}{2}\,1\,\underset{0}{\log(1)} - \frac{1}{2}\int_1^t x\,dx$$

$$= t - 1 + \frac{1}{2}t^2\log t - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^t$$

$$= t-1 + \frac{1}{2} t^2 \log t - \frac{1}{2}\frac{1}{2}(t^2-1) \quad \cancel{*}$$

$$g(1) = \int_1^1 (x \log x + 1)\, dx = 0$$

QUINDI g VERIFICA $g'(x) = x \log x + 1 \qquad g(1) = 0$

E NON $g(1) = 1$.

QUINDI LA f CERCATA È $f(t) = g(t) + 1 =$

$$= \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{2} t^2 \log t - \frac{1}{4}(t^2-1) + 1$$

ESERCIZIO 65

SI RISOLVA $\begin{cases} \boxed{f'(t) = 5 f(t)} \\ f(1) = 1 \end{cases}$

LA SOLUZIONE DI QUESTA EQ È UNICA, QUINDI SE LA TROVIAMO ABBIAMO FINITO.

TUTTE LE FUNZIONI $g(t) = C e^{5t}$

RISOLVONO $g'(t) = 5 g(t)$

CERCHIAMO C TALE CHE

$\boxed{y' = a y}$

$$C e^{5 \cdot 1} = 1 \qquad C = \frac{1}{e^5} = e^{-5}$$

$$f(t) = e^{-5} e^{5t} = e^{5(t-1)}$$

MODELLO DI EVOLUZIONE DI UNA POPOLAZIONE DI BATTERI

SIA $y(t)$ IL NUMERO DI INDIVIDUI DI UNA POPOLAZIONE DI BATTERI.

L'EQUAZIONE PIÙ SEMPLICE CHE POSSIAMO PENSARE PER L'INCREMENTO DELLA POPOLAZIONE È SIMILE A QUELLA UTILIZZATA PER LA SOSTANZA RADIOATTIVA

$$\boxed{y'(t) = \alpha\, y(t)} \qquad \boxed{\alpha > 0}$$

y' ESPRIME QUANTO STA CAMBIANDO y.
L'EQUAZIONE CI DICE CHE L'AUMENTO DI y È PROPORZIONALE A y. L'IPOTESI CHE STIAMO FACENDO È CHE UNA ~~PARTE~~ PERCENTUALE DELLA POPOLAZIONE DI BATTERI SI SCINDA (DA OGNI INDIVIDUO NE RICAVIAMO DUE).

LE SOLUZIONI DI QUESTA EQUAZIONE SONO

$$\boxed{y(t) = C\, e^{\alpha t}}$$

QUESTO MODELLO PUÒ AVERE UN SENSO IN TEMPI BREVI MA PER TEMPI LUNGHI È CHIARAMENTE IRREALISTICO.

$$\boxed{y' = n - m}$$

n = nuovi nati (per scissione)

m = morti (IN TESTA ABBIAMO QUESTA COSA IN MENTE: ~~LE~~ ~~RIS~~ RISORSE SONO LIMITATE E QUINDI QUANDO IL NUMERO DI BATTERI È GRANDE QUALCUNO INIZIA A MORIRE).

$n = \alpha y$ (I NATI È PROPORZIONALE ALLA POPOLAZIONE)

m = DIPENDERÀ DA y.

QUANDO LA POPOLAZIONE È PICCOLA NON CI SONO PROBLEMI DI RISORSE

QUANDO È GRANDE CRESCE IN MODO PIÙ CHE PROPORZIONALE

$$m = \beta y^2$$

(QUESTA IPOTESI È PURE STRANA ...)

$$y' = n - m = \alpha y - \beta y^2$$

$$\begin{cases} \boxed{y' = \alpha y - \beta y^2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

numerosità iniziale della popolazione di batteri.

$$y' = \alpha y - \beta y^2 \qquad \frac{y'}{\alpha y - \beta y^2} = 1$$

$$\int_0^t \frac{y'(x)}{\alpha y(x) - \beta y^2(x)} \, dx = \int_0^t 1 \, dx = t$$

$$\boxed{\int_a^b \underbrace{f(g(x)) \, g'(x)} \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \, dz.}$$

$$y = g \qquad f(y) = \frac{1}{\alpha y - \beta y^2}$$

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{\underbrace{\alpha z - \beta z^2}} \, dz$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{z(\alpha - \beta z)}\, dz .$$

$$\boxed{\frac{1}{z(\alpha-\beta z)}} = A\frac{1}{z} + B\frac{1}{(\alpha-\beta z)} =$$

$$= \frac{\boxed{A(\alpha-\beta z) + B z}}{\boxed{z(\alpha-\beta z)}}$$

VOGLIO CHE $A(\alpha - \underline{\beta z}) + Bz = \underline{\underline{1}}$

$$\underbrace{(-A\beta + B)}\, z + \underline{\underline{A\alpha}} = 1$$

VOGLIO $\underline{B - A\beta = 0}$ $\quad A\alpha = 1$

$$A = \frac{1}{\alpha} \qquad B = A\beta = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha z - \beta z^2}} = \boxed{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{z} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{(\alpha - \beta z)}}$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{\alpha z - \beta z^2}\, dz = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{\alpha}\frac{1}{z}\, dz + \int_{y_0}^{y(t)} \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{(\alpha-\beta z)}\, dz$$

$y(t) = y.$

$$= \frac{1}{\alpha}\log y \underbrace{- \frac{1}{\alpha}\log y_0} + \underline{\frac{\beta}{\alpha}\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\alpha - \beta z}\, dz}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\log y + \frac{\beta}{\alpha}\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\underline{-\beta}}\frac{1}{z - \frac{\alpha}{\beta}}\, dz + \text{COST}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\log y - \frac{1}{\alpha}\boxed{\int_{y_0}^{y}\boxed{\frac{1}{z - \frac{\alpha}{\beta}}}\, dz} + C$$

$$= \frac{1}{\alpha} \log y - \frac{1}{\alpha} \int_{y_0 - \frac{\alpha}{\beta}}^{y - \frac{\alpha}{\beta}} \frac{1}{w} \, dw + C$$

$$z \xrightarrow{g} z - \frac{\alpha}{\beta} \qquad g' = 1$$

$$x \xrightarrow{f} \frac{1}{w}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \log y - \frac{1}{\alpha} \log\left(y - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \underbrace{\frac{1}{\alpha} \log\left(y_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + C}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \log y - \frac{1}{\alpha} \log\left(y - \frac{\alpha}{\beta}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left(\log y - \log\left(y - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right) + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{y}{y - \frac{\alpha}{\beta}}\right) + C = t} = \int_0^t 1 \, dx$$

RIASSUNTO

$$* \begin{cases} \boxed{y' = \alpha y - \beta y^2} & \alpha, \beta > 0 \\ y(0) = y_0 & y_0 > 0 \end{cases}$$

Supponiamo y_0 piccolo

ABBIAMO RISCRITTO (*)

$$\frac{y'}{\alpha y - \beta y^2} = 1$$

e abbiamo integrato a destra e a sinistra e siamo arrivati

$$\frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{y}{y - \alpha/\beta}\right) + C = t$$

una costante

DA QUESTA EQUAZIONE RICAVO y

$$\frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{y}{y - \alpha/\beta}\right) = t - C$$

$$\log\left(\frac{y}{y-\alpha/\beta}\right) = \alpha(t-c)$$

$$\frac{y}{y-\alpha/\beta} = e^{\alpha(t-c)}$$

$$y = e^{\alpha(t-c)}\left(y-\frac{\alpha}{\beta}\right) = \underline{y\, e^{\alpha(t-c)}} - \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha(t-c)}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha(t-c)} = y\left(e^{\alpha(t-c)} - 1\right)$$

$$y = \frac{\alpha/\beta \; \boxed{e^{\alpha(t-c)}}}{e^{\alpha(t-c)} - 1} =$$

$$= \frac{\alpha/\beta}{1 - e^{-\alpha(t-c)}} = \frac{\alpha/\beta}{1 - \underbrace{e^{\alpha c}} e^{-\alpha t}} =$$

$$\boxed{y = \frac{\alpha/\beta}{1 - k\, e^{-\alpha t}}}$$

dove k è una costante $\quad y(0) = y_0$

$$\frac{\alpha/\beta}{1-k} = y_0 \qquad \frac{\alpha}{\beta} = y_0 - k y_0$$

$$k y_0 = y_0 - \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\boxed{k = 1 - \frac{\alpha}{y_0 \beta}}$$

$$y = \boxed{\frac{\alpha/\beta}{1 - k\, e^{-\alpha t}}} \quad \text{con} \quad k = 1 - \frac{\alpha}{y_0 \beta}$$

STUDIAMO LA SOLUZIONE CHE ABBIAMO TROVATO

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\alpha/\beta}{1 - k \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\downarrow \, 0}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

SUPPONIAMO $\boxed{0 < y_0 < \frac{\alpha}{\beta}}$

OSSERVO CHE $0 < y(t) < \frac{\alpha}{\beta} \quad \forall t.$

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \frac{1}{1 - k e^{-\alpha t}} \qquad k = 1 - \frac{\alpha}{y_0 \beta}$$

$$y_0 < \frac{\alpha}{\beta} \qquad 1 < \frac{\alpha}{y_0 \beta} \qquad k < 0$$

$$k = -D \qquad D > 0$$

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \frac{1}{\underbrace{1 + D e^{-\alpha t}}}$$

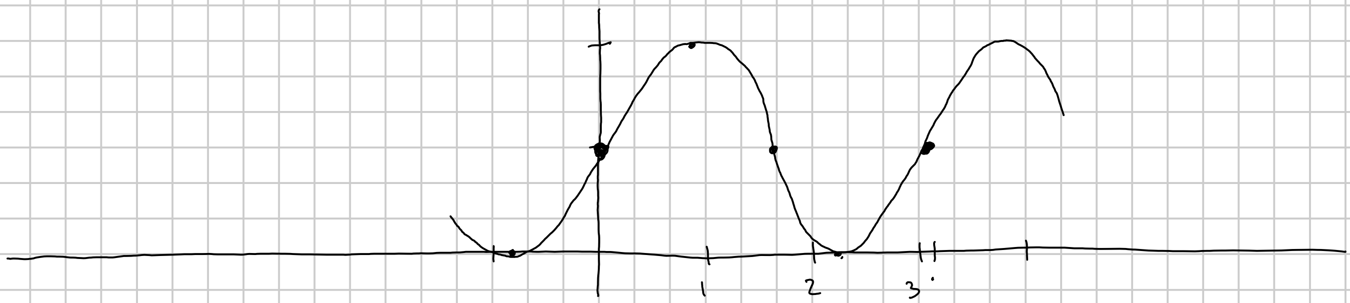
SICURAMENTE $y(t) > 0 \quad \forall t.$

e POICHÉ $1 + D e^{-\alpha t} > 1$ QUINDI $y(t) < \frac{\alpha}{\beta}$

$$y'(t) = \alpha y - \beta y^2 = \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\beta y} \left(\underset{\substack{\vee \\ 0}}{\frac{\alpha}{\beta} - y} \right) > 0$$

<u>LA FUNZIONE È CRESCENTE</u>

ESERCIZIO 60



LA PRIMA PROPOSTA È STATA $\underline{f(x) = \sin(x) + 1}$

È PERIODICA

È SEMPRE COMPRESA TRA ZERO E DUE

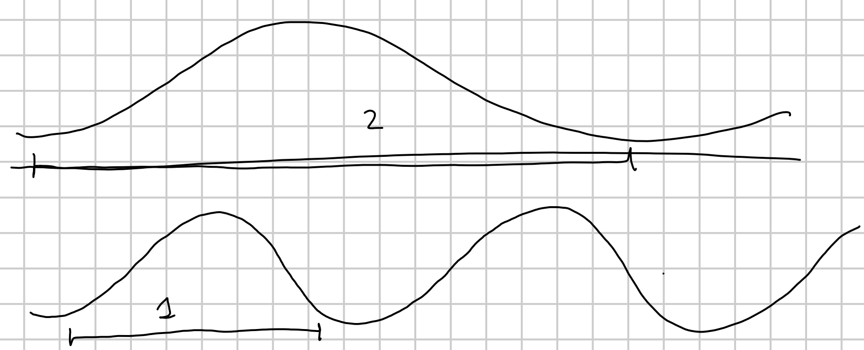
$\sin(x) = 0$ $\quad x = 0 \quad x = \pi \quad x = 2\pi \ \ldots$

quindi $f(x) = 1$ per $x = 0 \quad x = \pi \quad x = 2\pi \ \ldots$

MA LA FUNZIONE DEL GRAFICO È 1 ANCHE PER $x = \pi/2$

QUINDI $f(x) = \sin(x) + 1$ NON VA BENE

CERCO UNA FUNZIONE TIPO IL $\sin(x)$ CHE È UGUALE A ZERO PER $x = 0 \quad \pi/2 \quad \pi \quad 3/2\,\pi \ \ldots$



OSSERVIAMO CHE SE CONSIDERIAMO

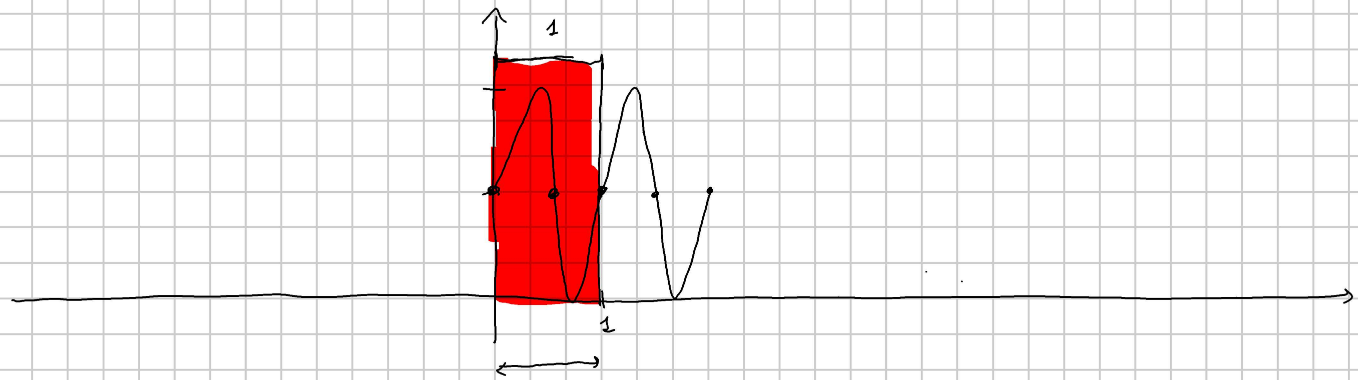
$$\sin(2x)$$

QUESTA FUNZIONA SI ANNULLA PER $2x = 0, \ \pi, \ 2\pi \dots$

PER $x = 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi, \dots$

LA FUNZIONE CERCATA È $f(x) = 1 + \sin(2x)$

ESERCIZIO 61



$$f(x) = \sin(\alpha x) + 1$$

$f(x) = 1$ per $x = 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2}$

CERCO α IN MODO CHE

$$\sin(\alpha x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \dots$$

$$\sin(\alpha x) = 0 \quad \text{per} \quad \alpha x = 0 \quad \pi \quad 2\pi \dots$$

$$x = 0 \quad \frac{\pi}{\alpha} \quad \frac{2\pi}{\alpha} \dots$$

voglio che $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{1}{2} \qquad \alpha = 2\pi.$

$$f(x) = \sin(2\pi x) + 1$$

$\boxed{\sin(\alpha x)} \qquad \cos(\alpha x)$

Il valore di α che mi interessa lo deduco da quanto è il periodo della funzione

LA FUNZIONE $\sin(x)$, $\cos(x)$

$$\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin(x)}$$

$f(x+T) = f(x)$ si dice una funzione periodica di periodo T

$\boxed{\sin(x)}$ è una funzione periodica di periodo 2π

$\cos(x)$

OSSERVO CHE

$$f(x) = \sin(\alpha x)$$

$\sin(x)$.

$$f\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right) = \sin\left(\alpha\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right)\right) = \sin(\alpha x + 2\pi) = \sin(\alpha x) = f(x)$$

È PERIODICA DI PERIODO $\boxed{\frac{2\pi}{\alpha}}$

$\sin(2\pi x)$