

LEZIONE 6 DICEMBRE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

STATE CERCANDO UNA FUNZIONE $y(t)$

CHE RISOLVE UN'EQUAZIONE CHE COINVOLGE, $t, y(t), y'(t)$

$y''(t) \dots$ Per esempio

L'EQUAZIONE

CONDIZIONI INIZIALI

$$\rightarrow \begin{cases} y'(t) = F(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$y' = f(t)$$

$$y'(t) = ay(t) + b$$

$$\bullet \begin{cases} y''(t) = F(t, y, y') \\ y(0) = \underline{y_0} \quad y'(0) = \underline{y'_0} \end{cases}$$

$$y'' = \text{costante}$$

ESERCIZIO 64

Si trovi una funzione f tale che

$$\begin{cases} f'(t) = 1 + t \log(t) \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

QUESTA EQUAZIONE DIFFERENZIALE È PARTICOLARE PERCHÉ STIANO

CALCOLANDO LA PRITIVA DI $1 + t \log(t)$

Definiamo
$$g(t) = \int_1^t 1 + x \log(x) dx =$$

$$= \int_1^t 1 dx + \int_1^t \underbrace{x \log x}_{\substack{f \\ G}} dx =$$

$F = \frac{1}{2} x^2$
 $G = \frac{1}{x}$

$$= t-1 + \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot \log(x) \right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{2} x^{\cancel{2}} \frac{1}{x} dx$$

$$= t-1 + \frac{1}{2} t^2 \log t - \frac{1}{2} \overset{0}{1} \log(1) - \frac{1}{2} \int_1^t x dx$$

$$= t-1 + \frac{1}{2} t^2 \log t - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^t$$

$$= t-1 + \frac{1}{2} t^2 \log t - \frac{1}{2} \frac{1}{2} (t^2-1) \quad *$$

$$g(1) = \int_1^1 (x \log x + 1) dx = 0$$

QUINDI g VERIFICA $g'(x) = x \log x + 1$ $g(1) = 0$

E NON $g(1) = 1$.

QUINDI LA f CERCATA È $f(t) = g(t) + 1 =$

$$= \frac{1}{2} (t-1) + \frac{1}{2} t^2 \log t - \frac{1}{4} (t^2-1) + 1$$

ESERCIZIO 65

SI RISOLVA

$$\left. \begin{array}{l} f'(t) = 5 f(t) \\ f(1) = 1 \end{array} \right\}$$

LA SOLUZIONE DI QUESTA EQ È UNICA, QUINDI SE LA TROVIAMO ABBIAMO FINITO.

TUTTE LE FUNZIONI $g(t) = C e^{5t}$

RISOLVONO $g'(t) = 5g(t)$

CERCHIAMO C TALE CHE

$$C e^{5 \cdot 1} = 1$$

$$C = \frac{1}{e^5} = e^{-5}$$

$$f(t) = e^{-5} e^{5t} = e^{5(t-1)}$$

$$y' = 5y$$

MODELLO DI EVOLUZIONE DI UNA POPOLAZIONE

DI BATTERI

SIA $y(t)$ IL NUMERO DI INDIVIDUI DI UNA POPOLAZIONE DI BATTERI.

L'EQUAZIONE PIÙ SEMPLICE CHE POSSIAMO
PENSARE PER L'INCREMENTO DELLA POPOLAZIONE
È SIMILE A QUELLA UTILIZZATA PER LA SOSTANZA
RADIODATTIVA

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad \alpha > 0$$

y' ESPRIME QUANTO STA CAMBIANDO y .

L'EQUAZIONE CI DICE CHE L'AUMENTO DI
 y È PROPORZIONALE A y . L'IPOTESI CHE STIANO FACENDO
È CHE UNA ^{PERCENTUALE} ~~PARTE~~ DELLA POPOLAZIONE DI BATTERI
SI SCINDA (DA OGNI INDIVIDUO NE RILASCIAMO DUE).

LE SOLUZIONI DI QUESTA EQUAZIONE SONO

$$y(t) = C e^{\alpha t}$$

QUESTO MODELLO PUÒ AVERE UN SENSO IN TEMPI
BREVI MA PER TEMPI LUNGI È CHIARAMENTE
IRREALISTICO.

$$y' = n - m$$

n = nati (per scissione)

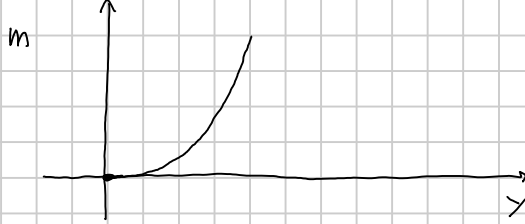
m = morti (IN TESTA A BBIANO QUESTA COSA

IN MENTE: ~~LE~~ ~~PER~~ RISORSE SONO LIMITATE

E QUINDI QUANDO IL NUMERO DI
BATTERI È GRANDE QUALCUNO INIZIA
A MORIRE).

$n = \alpha y$ (I NATI È PROPORZIONALE ALLA
POPOLAZIONE)

m = DIPENDERÀ DA y .



QUANDO LA POPOLAZIONE È PICCOLA

NON CI SONO PROBLEMI DI RISORSE

QUANDO È GRANDE CRESCE IN MODO PIÙ CHE PROPORZIONALE

$$m = \beta y^2$$

(QUESTA IPOTESI È PURE STRANA ...)

$$y' = n - m = \alpha y - \beta y^2$$

$$\begin{cases} y' = \alpha y - \beta y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

numerosità iniziale della popolazione d. batteri.

$$y' = \alpha y - \beta y^2$$

$$\frac{y'}{\alpha y - \beta y^2} = 1$$

$$\int_0^t \frac{y'(x)}{\alpha y - \beta y^2(x)} dx = \int_0^t 1 dx = t$$

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz.$$

$$y = z \quad f(z) = \frac{1}{\alpha z - \beta z^2}$$

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{\alpha z - \beta z^2} dz$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{z(\alpha - \beta z)} dz$$

$$\frac{1}{z(\alpha - \beta z)} = A \frac{1}{z} + B \frac{1}{(\alpha - \beta z)} =$$

$$= \frac{A(\alpha - \beta z) + Bz}{z(\alpha - \beta z)}$$

VOGLIO CHE $A(\alpha - \beta z) + Bz = 1$

$$(-A\beta + B)z + A\alpha = 1$$

VOGLIO $B - A\beta = 0$ $A\alpha = 1$

$$A = \frac{1}{\alpha} \quad B = A\beta = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{1}{\alpha z - \beta z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{z} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{(\alpha - \beta z)}$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{\alpha z - \beta z^2} dz = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{z} dz + \int_{y_0}^{y(t)} \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{(\alpha - \beta z)} dz$$

$y(t) = y$

$$= \frac{1}{\alpha} \log y - \frac{1}{\alpha} \log y_0 + \frac{\beta}{\alpha} \int_{y_0}^y \frac{1}{\alpha - \beta z} dz$$

$$= \frac{1}{\alpha} \log y + \frac{\beta}{\alpha} \int_{y_0}^y \frac{1}{-\beta} \frac{1}{z - \frac{\alpha}{\beta}} dz + \text{cost}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \log y - \frac{1}{\alpha} \int_{y_0}^y \frac{1}{z - \frac{\alpha}{\beta}} dz + C$$

$$= \frac{1}{\alpha} \log y - \frac{1}{\alpha} \int_{y_0 - \frac{\alpha}{\beta}}^{y - \frac{\alpha}{\beta}} \frac{1}{w} dw + C$$

$$z \xrightarrow{g} z - \frac{\alpha}{\beta} \quad g=1$$

$$w \xrightarrow{f} \frac{1}{w}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \log y - \frac{1}{\alpha} \log \left(y - \frac{\alpha}{\beta} \right) + \underbrace{\frac{1}{\alpha} \log \left(y_0 - \frac{\alpha}{\beta} \right)}_C + C$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha} \log y - \frac{1}{\alpha} \log \left(y - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right] + C$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left(\log y - \log \left(y - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right) + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{y}{y - \frac{\alpha}{\beta}} \right) + C} = t = \int_0^t 1 dx$$

R I A S S U N T O

$$* \begin{cases} \boxed{y' = \alpha y - \beta y^2} & \alpha, \beta > 0 \\ y(0) = y_0 & y_0 > 0 \end{cases} \quad \text{Supponiamo } y_0 \text{ piccolo}$$

ABBIAMO
RISCRITTO

$$\textcircled{*} \rightarrow \frac{y'}{\alpha y - \beta y^2} = 1 \quad \text{e abbiamo integrato a destra e a sinistra e non eravamo}$$

$$\frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{y}{y - \frac{\alpha}{\beta}} \right) + C = t$$

una costante

DA QUESTA EQUAZIONE RICAVO y

$$\frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{y}{y - \frac{\alpha}{\beta}} \right) = t - C$$

$$\log\left(\frac{y}{\gamma - \frac{\alpha}{\beta}}\right) = \alpha(t - c)$$

$$\frac{y}{\gamma - \frac{\alpha}{\beta}} = e^{\alpha(t - c)}$$

$$y = e^{\alpha(t - c)} \left(\gamma - \frac{\alpha}{\beta}\right) = \underbrace{\gamma e^{\alpha(t - c)}}_{-\frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha(t - c)}} - \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha(t - c)}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha(t - c)} = \gamma \left(e^{\alpha(t - c)} - 1 \right)$$

$$y = \frac{\frac{\alpha}{\beta} \boxed{e^{\alpha(t - c)}}}{e^{\alpha(t - c)} - 1} =$$

$$= \frac{\alpha / \beta}{1 - e^{-\alpha(t - c)}} = \frac{\alpha / \beta}{1 - \underbrace{e^{-\alpha c}}_k e^{-\alpha t}} =$$

$$\boxed{y = \frac{\alpha / \beta}{1 - k e^{-\alpha t}}}$$

dove k è una costante $y(0) = y_0$

$$\frac{\alpha / \beta}{1 - k} = y_0$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = y_0 - k y_0$$

$$k y_0 = y_0 - \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\boxed{k = 1 - \frac{\alpha}{y_0 \beta}}$$

$$y = \frac{\alpha / \beta}{1 - k e^{-\alpha t}}$$

$$\text{con } k = 1 - \frac{\alpha}{y_0 \beta}$$

STUDIARE LA SOLUZIONE CHE ABBIAMO

TROVATO

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha/\beta}{1 - \underbrace{h e^{-\alpha t}}_0} = \frac{\alpha}{\beta}$$

SUPPONIAMO

$$0 < y_0 < \frac{\alpha}{\beta}$$

OSSERVO CHE $0 < y(t) < \frac{\alpha}{\beta} \quad \forall t.$

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{1 - h e^{-\alpha t}}$$

$$h = 1 - \frac{\alpha}{y_0 \beta}$$

$$y_0 < \frac{\alpha}{\beta} \quad 1 < \frac{\alpha}{y_0 \beta} \quad h < 0$$

$$h = -D \quad D > 0$$

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{1 + D e^{-\alpha t}}$$

DI CURA DEMENTE $y(t) > 0 \quad \forall t.$

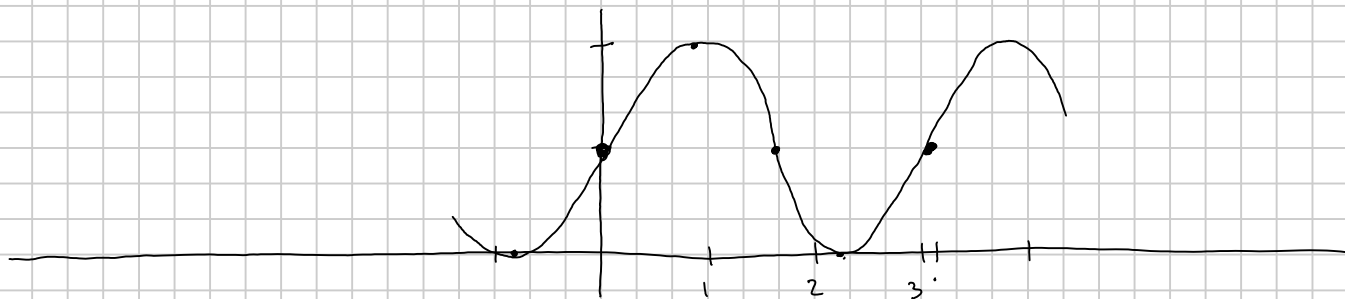
e poiché $1 + D e^{-\alpha t} > 1$ quindi $y(t) < \frac{\alpha}{\beta}$

$$y'(t) = \alpha y - \beta y^2 = \beta y \left(\underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_0 - \underbrace{y}_0 \right) > 0$$

LA FUNZIONE È CRESCENTE



ESERCIZIO 60



LA PRIMA PROPOSTA È STATA $f(x) = \sin(x) + 1$

È PERIODICA

È SEMPRE COMPRESA TRA ZERO E DUE

$$\sin(x) = 0 \quad x = 0 \quad x = \pi \quad x = 2\pi \dots$$

$$\text{quindi } f(x) = 1 \quad \text{per } x = 0 \quad x = \pi \quad x = 2\pi \dots$$

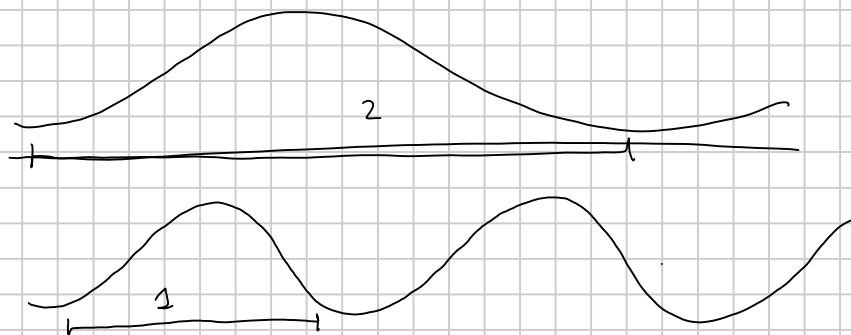
MA LA FUNZIONE DEL GRAFICO È 1 ANCHE

$$\text{PER } x = \pi/2$$

QUINDI $f(x) = \sin(x) + 1$ NON VA BENE

CERCO UNA FUNZIONE TIPO IL $\sin(x)$ CHE È UGUALE

A ZERO PER $x = 0 \quad \pi/2 \quad \pi \quad 3/2\pi \dots$



OSSERVANDO CHE SE CONSIDERIAMO

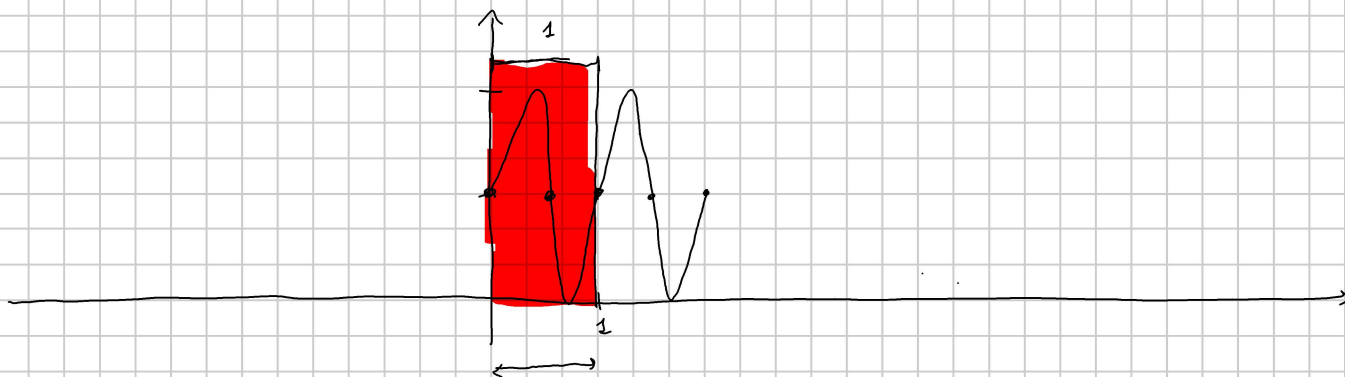
$$\sin(\underset{\sim}{2}x)$$

QUESTA FUNZIONE SI ANNULLA PER $\underline{2x} = 0, \pi, 2\pi, \dots$

PER $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$

LA FUNZIONE CERCATA È $f(x) = 1 + \sin(2x)$

ESERCIZIO 61



$$f(x) = \sin(2x) + 1$$

$$f(x) = 1 \quad \text{per } x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$$

CERCO α IN UN NODO CHE

$$\sin(2x) = 0 \quad \text{per } x = 0, \left(\frac{1}{2}\right), \left(1\right), \frac{3}{2}, \dots$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \text{per } 2x = 0, \pi, 2\pi, \dots$$
$$x = 0, \left(\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{2\pi}{2}\right), \dots$$

$$\text{voglio che } \frac{\pi}{\alpha} = \frac{1}{2} \quad \alpha = 2\pi.$$

$$f(x) = \sin(2\pi x) + 1$$

$$\boxed{\sin(\alpha x)} \quad \sin(2x)$$

Il valore di α che mi interessa lo deduco da questo è il periodo della funzione

LA FUNZIONE $\sin(x)$, $\cos(x)$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$f(x + T) = f(x)$$

si dice una funzione periodica di periodo T

$$\begin{array}{|c|} \hline \sin(x) \\ \hline \cos(x) \\ \hline \end{array}$$

è una funzione periodica di periodo 2π

OSSERVO CHE

$$f(x) = \sin(\alpha x)$$

$\sin(x)$.

$$f\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right) = \sin\left(\alpha\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right)\right) = \sin(\alpha x + 2\pi) = \sin(\alpha x) = f(x)$$

È PERIODICA DI PERIODO $\frac{2\pi}{\alpha}$

$\sin(2\pi x)$