LEZIONE 21 SETTEMBRE

21 September 2021 12:23

PERCENTUALI

Il $p\%$ di una quantità $\underline{x}$ vuol $\frac{p}{100} \cdot x$

Esercizio

Una soluzione è composta da due sostanze, la prima è 2 l e la seconda 13 l. Qual'è la percentuale della prima sostanza nella soluzione?

Litri totali $= 2l + 13l = 15\,l$

quindi la presenza relativa della prima sostanza

è

$$\frac{2}{15} = 0,133 = \frac{0,133}{1} = \frac{13,3}{100}$$

QUINDI È IL $13,3\%$

$$\frac{2}{15} = \frac{2 \cdot \frac{100}{15}}{\cancel{15} \cdot \frac{100}{\cancel{15}}} = \frac{\boxed{2 \cdot \frac{100}{15}}}{100}$$

ESERCIZIO

Sia P una popolazione che
ogni anno aumenta del 5 %
e che nel 2000 è di 1'000'000 di abitanti.
Quanti abitanti ha questa popolazione nel 2001
> nel 2001
> nel 2002
> nel 2020

- Tra il 2000 e il 2001 la popolazione aumenta del 5 % ovvero di

$$\frac{5}{1\cancel{00}} \cdot 1'000'0\cancel{00} = 50'000$$

La popolazione nel 2001 è di

$$1'000'000 + 50'000 = 1'050'000 \text{ abitanti.}$$

Per calcolare la popolazione nel 2002 faccio la stessa cosa. Tra il 2001 e il 2002 la popolazione aumenta del 5 % di

$$\frac{5}{1\cancel{00}} \; 1'050'0\cancel{00} = 52'500$$

La popolazione nel 2002 è

$$1'050'000 + 52'500 =$$
$$= \underline{1'102'500}$$

Sia P_0 la popolazione nel 2000.

Sia P_n la popolazione nell'anno $2000+n$.

L'esercizio ci dice quanto aumenta la popolazione quando passo dall'anno n all'anno $n+1$

e aumenta di $\frac{p}{100} \cdot P_n$

$$P_{n+1} = 1 \cdot P_n + \frac{p}{100} P_n = \boxed{\left(1+\frac{p}{100}\right)} P_n$$

$$q = 1 + \frac{5}{100} = \frac{105}{100}$$

$$P_{n+1} = q P_n$$

$$P_0 \qquad P_1 = q P_0 \qquad P_2 = q P_1 = q \cdot q \cdot P_0$$

$$P_3 = q^3 P_0 \quad \cdots \quad P_n = q^n P_0$$

$$P_{20} = q^{20} P_0 =$$

$$= \left(\frac{105}{100}\right)^{20} 1'000'000$$

$= \underline{(1,05)^{20}} \; 1\,000\,000$

$= 2,65 \cdot 1\,000\,000$

$= 2\,650\,000$

POTENZE DI UN NUMERO

X^a

1° CASO $a \in \mathbb{N}$, a è un numero intero ≥ 0.

- $a > 0$ $\quad x^a = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{a \text{ volte}}$

- $x^0 = 1$

OSS $\quad x^3 \cdot x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^8$

$$\boxed{x^a \cdot x^b = x^{a+b}} \longleftarrow$$

$(x^3)^5 = x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3$

$= (x \cdot x \cdot x) \cdots\cdots\cdots (x \cdot x \cdot x) = x^{15}$

$(x^a)^b = x^{ab}$

2° CASO $a \in \mathbb{Z}$, intero.

Definisco x^a per $x \neq 0$.

- Per $e \geq 0$ lo abbiamo appena definito
- Per $e < 0$ $\quad e = -b \quad b > 0$

DEFINISCO $\quad x^{e} = \dfrac{1}{x^{b}}$

$$x^{-5} = \frac{1}{x^{5}}$$

OSSERVAZIONE

$e > 0$

$$x^{e} \cdot x^{-e} = \boxed{= x^{e-e} = x^{0} = 1.}$$

$$= \cancel{x^{e}} \, \frac{1}{\cancel{x^{e}}} = 1.$$

3° CASO $\quad e \in \mathbb{Q}$, una frazione

e definiamo x^{e} per $x > 0$.

DEFINIAMO $\quad x^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{x} \qquad e = \dfrac{1}{b}$ con $b \in \mathbb{N}$, $b > 0$.

ovvero quel numero y tale che $y^{b} = x$.

$$\boxed{y \geq 0}$$

OSSERVAZIONE

$$x^{\frac{1}{b} \cdot b} = \left(\left(x^{\frac{1}{b}} \right) \right)^{b} = x$$

$$x^{\frac{1}{b} \cdot b} = x^{1} = x \qquad x^{\frac{1}{b}} = y$$

IN GENERALE Se $\alpha = \dfrac{c}{b}$ con $c \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$ $b > 0$

DEFINISCO
$$x^{\alpha} = \left(x^{\frac{1}{b}}\right)^{c} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^{c} = \sqrt[b]{x^{c}}$$

$$27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{2} = 3^{2} = 9$$

ESR
$$(64)^{-4/3} = \left((64)^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^{-4} = 4^{-4} = \frac{1}{4^{4}} = \frac{1}{256}.$$

4° CASO $\alpha \in \mathbb{R}$

"DEFINISCO" x^{α} per $x > 0$

$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots\ldots$

$\sqrt{2}$

$1 < \sqrt{2} < 2$

$5^{\sqrt{2}}$ $\qquad 1 < \sqrt{2} < 2$

$5 < 5^{\sqrt{2}} < 5^2 = 25$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

$9,52 = 5^{1,4} < 5^{\sqrt{2}} < 5^{1,5} = 11,18$

$(\sqrt[5]{5})^7 = 5^{\frac{7}{5}} = 5^{\frac{14}{10}}$ $\qquad 5^{\frac{15}{10}} = 5^{3/2} = (\sqrt{5})^3$

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

$5^{1,41} < 5^{\sqrt{2}} < 5^{1,42}$

$5^1 \qquad 5^2$

$5^{1,4} \qquad 5^{1,5}$

$5^{1,41} \qquad 5^{1,42}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$L \qquad L$

$x^e \qquad x > 0 \qquad e \in \mathbb{R}.$

$\boxed{x^e \cdot x^b = x^{e+b}}$

$(x^e)^b = x^{eb}$

$\boxed{x^0 = 1}$

$$\boxed{(x^a)^b = x^{ab}}$$

ESERCIZIO

UNA POPOLAZIONE OGNI ANNO AUMENTA DEL $p\%$

E TRA IL 2000 E IL 2020 RADDOPPIA. QUANTO VALE p?

RICORDIAMO CHE SE P_n è la popolazione all'anno $2000+n$

$$P_n = \left(1+\frac{p}{100}\right)^n P_0 = q^n P_0$$

$$P_{20} = 2 P_0$$

$$q^{20} P_0 = 2 P_0$$

OVVERO $\quad q^{20} = 2$

QUINDI $\quad q = 2^{1/20} = \sqrt[20]{2} = 2^{0,05}$

$= 1,03$

$$q = 1 + \frac{p}{100} = 1,03$$

$$\frac{p}{100} = 0,03 \qquad p = 3$$

NOTAZIONE SCIENTIFICA.

$537,3$ Kg $=$

$= \underline{5,373} \cdot 10^{2}$ Kg

$0,037$ Kg $=$

$= \frac{3,7}{100}$ Kg $= \underline{3,7} \; 10^{-2}$ Kg.

RICHIAMI SUGLI INSIEMI

$\in$ appartiene

$5 \in \mathbb{N}$

5 appartiene a $\mathbb{N}$

$\notin$ non appartiene

$\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

$\subset$ $A \subset B$ vuol dire A contenuto in B

ovvero ogni elemento di A, è un elemento di B.

$B \supset A$ B contiene A.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

<u>OSS</u> $A \subset B$ anche se $A = B$

$3 \subset \mathbb{N}$ NON È VERO

$3 \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$. NON È VERO

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.