LEZIONE 29 NOVEMBRE

54

$$x^\alpha \quad \frac{1}{x} \quad \sin \quad \cos \quad e^x \quad \frac{1}{1+x^2}$$

$\alpha \neq -1$

$$\int_0^1 x^3 \, dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} 1^4 - \frac{1}{4} 0^4 = \frac{1}{4}$$

$$x^3 = D\left(\underbrace{\frac{1}{4}}\, x^4\right) \qquad \alpha \neq -1 \quad x^\alpha = D\left(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right)$$

$$\int_0^\pi \sin(x)\, dx = \left[-\cos(x) \right]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

$$\sin(x) = -D \cos(x)$$

$$D(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

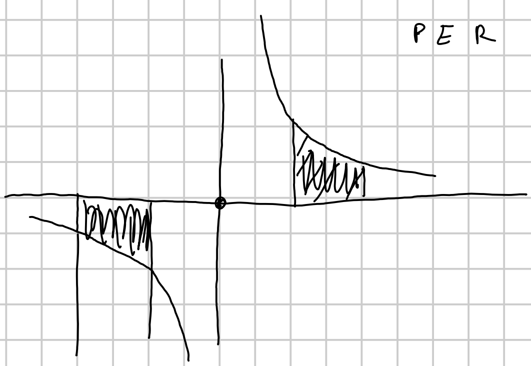
$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \left[\log(x) \right]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \left(-\log(2)\right) = \left[\log(-x) \right]_{-2}^{-1} = \log 1 - \log 2 = -\log 2$$

non è vero che per $-2 < x < -1$ $D(\log x) = \frac{1}{x}$

IL LOGARITMO NON È NEPPURE DEFINITO

PER $-2 < x < -1$



$$f(x) = \log(-x) \qquad f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$$

f è definita per $x < 0$

$$f'(x) = \frac{1}{y}(-1) = \frac{(-1)}{-x} = \frac{1}{x}$$

$$x \xrightarrow[-1]{} -x \qquad y \xrightarrow[1/y]{} \log y$$

OSSERVAZIONE per $x > 0$ $D(\log x) = \frac{1}{x}$

$x < 0$ $D(\log(-x)) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^{-2} \qquad \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\alpha = -2}$$

$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\operatorname{arctg} \right]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

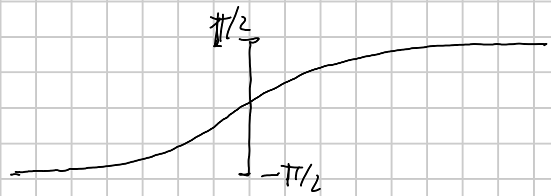
$$D(\operatorname{arctg}) = \frac{1}{1+x^2}$$

arcsin

arccos

$\boxed{\operatorname{arctg}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

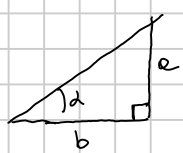
L' Immagine di arctg è $(-\pi/2 \quad \pi/2)$



$$tg(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Se $\sin(\alpha) = 0$ $\quad tg(\alpha) = 0$

$tg(0) = 0.$



$$tg(\alpha) = \frac{e}{b} = 1 \qquad e = b$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$\frac{\pi}{4} = 45°$

$tg(0) = 0$	$\operatorname{arctg}(0) = 0$
$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$	$\operatorname{arctg}(1) = \pi/4$

$$\int \frac{x^5 + x^4 + \dots}{x^7 + x^2 + 1 \dots}\,dx \qquad \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{x}{1+x^2} \quad \text{e Polinomi}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(1)} f(y)\,dy$$

$$\int_0^1 f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(0)}^{g(1)} f(y)\,dy$$

$$g(x) = x^2 \qquad f(y) = \frac{1}{1+y} \qquad f(g(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x) = 2x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0^2=0}^{1^2=1} \frac{1}{1+y}\cdot 1\cdot dy = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2}\Big[\log z\Big]_1^2 = \frac{1}{2}\log 2$$

$$g(y) = 1+y \qquad f(z) = \frac{1}{z} \qquad f(g(y)) = \frac{1}{1+y}$$

$$g'(y) = 1$$

$\boxed{55}$

$$\int_0^1 x^3 e^x\,dx =$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx = \Big[F(x)\,G(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)\,G'(x)\,dx \qquad F' = f}$$

$$\int_0^1 \underbrace{x^3}_{G}\,\underbrace{e^x}_{f}\,dx = \Big[x^3 e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 3\underbrace{x^2 e^x}_{\#}\,dx$$

$$F = e^x = \Big[x^3 e^x\Big]_0^1 - 3\left(\underbrace{\int_0^1 x^2 e^x\,dx}\right)$$

$$= \left[x^3 e^x\right]_0^1 - 3\left(\left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\, e^x\, dx\right)$$

$$= \left[x^3 e^x\right]_0^1 - 3\left[x^2 e^x\right]_0^1 + 6\left(\int_0^1 x e^x\, dx\right)$$

$$= \left[x^3 e^x - 3x^2 e^x\right]_0^1 + \underline{6}\left(\left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx\right)$$

$$= \left[\underline{x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x} - \underline{6e^x}\right]_0^1$$

$$= e - 3e + \cancel{6e} - \cancel{6e} + 6 = 6 - 2e$$

$$\int_0^1 \underset{G}{\underline{x}}\ \underset{f}{\cos(x)}\, dx = \left[\underset{G}{x}\ \underset{F}{\sin x}\right]_0^1 - \int_0^1 \underset{G'}{1}\ \sin(x)\, dx =$$

$F = \sin(x) \qquad F' = f.$

$$= \left[x \sin x\right]_0^1 + \int_0^1 (-\sin(x))\, dx$$

$$-\int \sin(x)\, dx = -\left[-\cos\right]_0^1$$

$$= \left[x \sin(x)\right]_0^1 + \left[\cos x\right]_0^1 =$$

$D \cos = -\sin$

$$= \sin 1 - 0 + \cos 1 - \cos 0$$

$$\int -\sin = \left[\cos\right]_0^1$$

$$= \sin 1 + \cos 1 - 1$$

$\boxed{5\ 6}$

$$\int_0^{\pi/6} \underline{\cos(3x + \pi)}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/6} \cos(3x + \pi) \cdot 3 \cdot dx$$

$$\int_a^b f(g(x))\, \underline{g'(x)}\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy$$

$g(x) = \boxed{3x + \pi} \qquad f(y) = \cos y$

$g'(x) = 3$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/6} \cos(3x+\pi)\, 3 \, dx = \frac{1}{3} \int_{g(0)}^{g(\pi/6)} \cos(y)\, dy = \frac{1}{3} \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \underline{\cos y}\, dy$$

$$f(g(x)) \qquad g'(x)$$

$$= \frac{1}{3} \Big[\sin y \Big]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{3} \underbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{=-1} - \frac{1}{3} \underbrace{\sin \pi}_{=0}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\, dx}$$

$$\int_0^{\pi^2} f(g(x))\, g'(x)\, dx =$$

$$\boxed{g(x) = \sqrt{x}} = x^{1/2} \qquad \boxed{f(y) = \sin y} \leftarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \int_0^{\pi^2} 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})\, \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi^2} \boxed{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}\, \overbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}}^{g'}\, dx = $$

$$g(x) = \sqrt{x} \qquad \boxed{f(y) = y \sin y}$$

$$= 2 \int_{0 = g(0)}^{g(\pi^2) = \pi} y \sin y \, dy = 2 \Big[y (-\cos y) \Big]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} -\cos y \, dy$$

$G \qquad f$

$$F = -\cos y$$

$$= -2 \Big[y \cos y \Big]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \cos y \, dy$$

$$= -2\left[y \cos y \right]_0^{\pi} + 2\left[\sin y \right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,(g^{-1})'(y)\,dy.}$$

g è una funzione invertibile con $g' \neq 0$ ovunque $\}$

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,dx = \int_{g(0)}^{g(\pi^2)} \sin(y)\,2y\,dy$$

$f(y) = \sin(y)$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$ $\quad \underline{g^{-1}(y) = y^2}$

$$= 2\int_0^{\pi} y \sin(y)\,dy.$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

ESEMPIO UN PUNTO SI MUOVE SU UNA RETTA E HA POSIZIONE $x(t)$ AL TEMPO

$x(1) = 1 \qquad x'(t) = v(t) = t^2$

$$x(t) = 1 + \int_1^t v(\tau)\,d\tau = 1 + \int_1^t \tau^2\,d\tau = \left[\frac{1}{3}\tau^3\right]_1^t + 1 = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3} + 1$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}$$

TEOREMA Se f è una funz. (continua) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

esiste ed è unica $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\underline{F' = f}$ e $F(x_0) = y_0$

$$\begin{cases} F' = f \\ F(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ESEMPIO Supponiamo che un punto si muove su una retta e all'istante t la posizione $x(t)$. Supponiamo che $v(t)$ sia la velocità del punto e che l'accelerazione $a(t) = v'(t)$ sia uguale a 5 sempre.

Supponiamo anche che $x(0) = 1$ $\quad x'(0) = 1$

$$\boxed{x(0) = 1 \qquad x'(0) = 1 \qquad D(D(x(t))) = 5}$$

$$v'(t) = 5$$

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \\ x''(t) = 5 \quad \text{per ogni } t. \end{cases} \quad *$$

VOGLIAMO CALCOLARE $x(t)$.

1° PASSO MI CALCOLO $v(t)$

$$\begin{cases} v(0) = 1 \\ v'(t) = 5 \end{cases} \qquad v(t) = x'(t)$$

QUINDI ESISTE UNA QUALCHE COSTANTE C TALE CHE

$$\begin{cases} v(t) = 5t + C \\ v(0) = 1 \end{cases} \quad \text{DA CUI RICAVIAMO } C = 1$$

$$v(t) = \underline{5t + 1}.$$

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(t) = v(t) = \underline{5t+1} \end{cases} \quad *$$

POICHÉ $\frac{5}{2}t^2 + t$ è una primitiva di $5t+1$

SAPPIAMO CHE ESISTE UNA COSTANTE C' TALE CHE

$$x(t) = \frac{5}{2}t^2 + t + C'$$

DA $x(0)=1$ RICAVIAMO CHE $c'=1$.

QUINDI $x(t) = \frac{5}{2}t^2 + t + 1$

$$\left\{\begin{array}{l} x(0)=1 \\ x'(0)=1 \\ x''(t)=5 \quad \text{per ogni} \end{array}\right] \rightsquigarrow \text{ricaviamo } x(t)$$

ESEMPIO

SUPPONIAMO DI AVERE UNA SOSTANZA RADIOATTIVA DI AVERNE UNA QUANTITÀ $y(t)$ CON IL PASSARE DEL TEMPO UNA CERTA PERCENTUALE α DELLA SOSTANZA DECADE E QUINDI LA QUANTITÀ DI y DIMINUISCE

y

$$\underbrace{y' = -\alpha y}$$

$y(t)$

$y(t+1) = y(t) - \alpha y(t)$

1 $y(1)$

2 $y(1) - \alpha y(1) \ldots$

$\boxed{n}$

$y(t)$ $y(t+h)$ con h piccolo.

$y(t+h) = y(t) - \alpha y(t)h$

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = -\alpha y(t)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{y'(t) = -\alpha y(t)}$$

α esprime la percentuale di sostanza che decade nell' unità di tempo

$y' = -\alpha y$ esprime il fatto che nell'istante t una certa percentuale della sostanza decade.

VISIONE DISCRETA

MISURO y SOLO PER VALORI INTERI DEL TEMPO

$y(0) \quad y(1) \quad y(2) \quad y(3) \quad \dots$

$$y(1) = y(0) - \alpha y(0)$$

α percentuale della sostanza che decade in un giorno.

$$y(2) = y(1) - \alpha y(1)$$

$$y(3) = y(2) - \alpha y(2) \quad \dots$$

ORA VOGLIO DESCRIVERE QUESTO DECADIMENTO COME UN FENOMENO CONTINUO.

$$y(t + dt) \approx y(t) \boxed{- \underline{\beta} \; \underline{y(t)} \; \underline{dt}}$$

QUI C'È UN' APPROSSIMAZIONE CHE È QUESTA

LA QUANTITÀ DI SOSTANZA CHE SI TRASFORMA IN UN TEMPO dt PICCOLO È PROPORZIONALE A dt.

LA QUANTITÀ DI SOSTANZA ~~CHE~~ DECADE

È PROPORZIONALE A y (LO SO DALLA FISICA)

È PROPORZIONALE A dt (PER dt PICCOLO È

LA SOLITA APPROSSIMAZIONE

DI UNA FUNZIONE CON LA

RETTA TANGENTE)

$$y(t+dt) = y(t) - \beta\, y(t)\, dt$$

$$y(t+dt) - y(t) = -\beta\, y(t)\, dt$$

$$\frac{y(t+dt) - y(t)}{dt} = -\beta\, y(t)$$

$dt \longrightarrow 0$

$$\boxed{y'(t) = -\beta\, y(t)}$$