LEZIONE 23 NOVEMBRE

- Se $F' = f$ allora $\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b = F(b) - F(a)$

- $\int_a^b \underline{f(x)}G(x)dx = [F\,G]_a^b - \int_a^b \underline{F(x)\,G'(x)\,dx}$ $\qquad F' = f$

$$\int_0^2 x^2 e^x\,dx = \left[x^2 e^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x\, 2x\,dx$$

$G \quad f(x) = e^x$

$F(x) = e^x$

$$= \left[x^2 e^x\right]_0^2 - 2\int_0^2 e^x\, x\,dx$$

$\qquad f \quad G$

$$= \left[x^2 e^x\right]_0^2 - 2\left(\left[e^x\,x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x\,1\,dx\right)$$

$$= \left[x^2 e^x\right]_0^2 - 2\left[e^x\,x\right]_0^2 + \underline{2\int_0^2 e^x\,dx}$$

$$= \left[x^2 e^x\right]_0^2 - 2\left[e^x\,x\right]_0^2 + 2\left[e^x\right]_0^2$$

$$= \underline{4e^2} - 0 \underline{- 2\,(2e^2 - 0)} + \underline{2\,(e^2 - 1)}$$

$$= 2e^2 - 2$$

- $$\boxed{\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy}$$

$$\int_0^1 e^{x+1}\,dx = \int_0^1 e\cdot e^x\,dx = \underline{e\int_0^1 e^x\,dx}$$

$$= e\,[e^x]_0^1 = e(e-1)$$

$$\int_0^1 e^{x+1}\cdot 1\cdot dx = \int_0^1 f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(0)}^{g(1)} e^y\,dy = \int_1^2 e^x\,dx =$$

e^{x+1} $\qquad x \longrightarrow \underset{g(x)}{\overset{}{x+1}}$ $\qquad y \longrightarrow \underset{f(y)}{e^y}$ $\qquad e^{x+1} = f(g(x))$

$g'(x) = 1$

$$= e^2 - e = e(e-1)$$

$$\int_0^1 e^{-2x+1}\,dx = \int_0^1 f(g(x))\,dx =$$

$$x \longrightarrow -2x+1 \qquad y \longrightarrow e^y$$

$-2x+1 = g(x)$ $\qquad e^y = f(y)$

$g'(x) = -2$

$$\int_0^1 f(g(x))\,dx = \int_0^1 \frac{1}{-2}\, f(g(x))\,\underline{(-2)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(1)} f(y)\,dy = -$$

$g(x) = 1-2x$

$$\int_1^{-1} e^y\,dy = \underline{-\int_{-1}^{1} e^y\,dy}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^{-1} e^y\,dy = -\frac{1}{2}\left[e^y\right]_1^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-1} - e\right)$$

$$\boxed{[f]_a^b = f(b) - f(a) = -[f]_b^a = -f(a) + f(b)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int_a^b f(g(x))\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \underline{f(y)}\,(g^{-1})'(y)\,dy \\ \\ \text{Se } g \text{ è bijettiva e } g^{-1} \text{ è l'inversa di } g \\ \quad g'(x) \neq 0 \ \forall x\end{array}}$$

$$\int_1^2 e^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$x \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ g(x)}}{\sqrt{x}} \qquad y \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ f(y)}}{e^y}$$

$$g(x) = y \qquad \underline{\sqrt{x} = y} \qquad \underline{x = y^2}$$

$$g^{-1}(y) = y^2$$

$$\int_1^2 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 f(g(x))\,dx = \int_{g(1)}^{g(2)} e^y \cdot 2y\,dy =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{2}} y\,e^y\,dy = \text{PER PARTI CALCOLARE L'INTEGRALE.}$$

OSSERVAZIONE

SUPPONIAMO CHE UN PUNTO SI MUOVA LUNGO UNA RETTA E ALL'ISTANTE t SIA NELLA POSIZIONE $x(t)$.

$$\begin{cases} x(1) = 5 \\ x'(t) = v(t) = t + t^2 \end{cases}$$

VOGLIAMO CALCOLARE $x(t)$ E, PER ESEMPIO, DETERMINARE $x(3)$.

1° OSSERVAZIONE C'È AL PIÙ UNA FUNZIONE CHE VERIFICA LE DUE CONDIZIONI.

$$\boxed{\begin{array}{l} x(1) = 5 \\ x'(t) = v(t) \end{array}} = t + t^2$$

INFATTI SIA $x(t)$ e $y(t)$ DUE FUNZIONI CHE VERIFICANO
$$\begin{cases} x(1) = y(1) = 5 \\ x'(t) = y'(t) = v(t) \end{cases}$$

POICHÉ $x'(t) = y'(t)$ PER OGNI t $x(t) = y(t) + C$. PER OGNI t

$$x(1) = y(1) + C$$
$$5 = 5 + C$$
$$0 = C.$$

2° OSSERVAZIONE CE NE È ESATTAMENTE E SI CALCOLA INTEGRANDO $v(t)$.

$$F(t) = \int_0^t v(x)\,dx \qquad F'(t) = v(t)$$

LA FUNZIONE CHE CERCO SARÀ $F(t) + C = x(t)$

$x' = v$

$$F(t) = \int_0^t x + x^2 \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^t + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - 0 + \frac{1}{3}t^3 - 0 = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$$

$$x(t) = F(t) + C \qquad x(1) = 5$$

$x(1) = F(1) + c = 5$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + c = 5 \qquad c = 5 - \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$

$x(t) = \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3 + \frac{25}{6}$.

TEOREMA Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua
(va bene anche con intervallo e tutte le nostre funzioni sono continue)

1) $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$

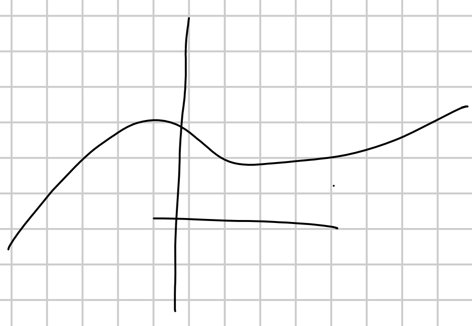
ESISTE UN'UNICA FUNZIONE $F(x)$ TALE CHE

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(x_0) = y_0 \end{cases}$$

LA F È: $F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

2) SE F e G SONO DUE FUNZIONI TALI CHE $\underline{F'} = G' = \underline{f}$ ALLORA $F(x) = G(x) + c$ PER OGNI x.

- RICEVIMENTO DAL 3 DIC IL VENERDÌ ALLE 16 e 30.



- DIRE QUALI SONO I PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOC.
- $f(3)$
- $f'(3)$
- L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO NEL PUNTO DI ASCISSA 3

- DOVE È ZERO   DOVE È >0
- LE SOLUZIONI $f(x) = 5$
- DOVE È CRESCENTE
- DOVE $f' < 0$.

-

$f(x) = ax + b$ ×

$ax^2 + bx + c$ ×

$ab^x + c$ ×

$\underline{5} \log_{\underline{3}}(x + \underline{3}) + \underline{2}$ ×

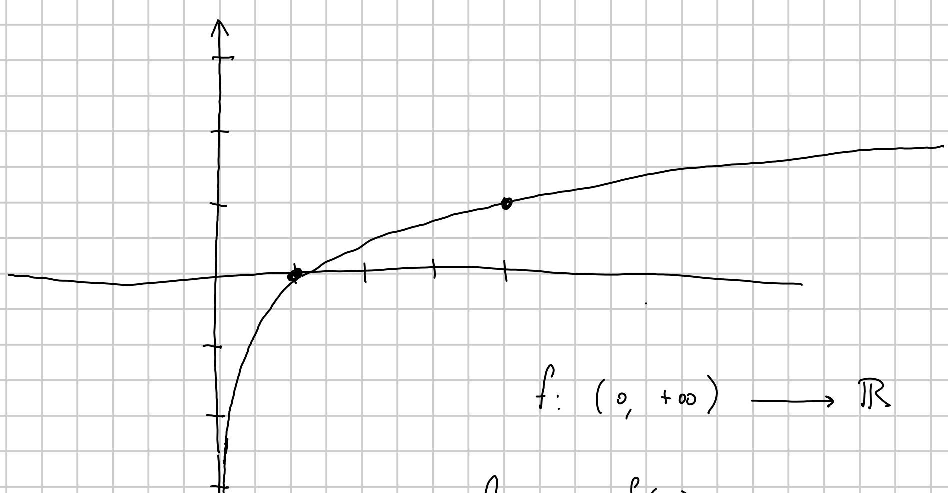
IN QUALE CASO MI TROVO E CHI SONO a, b, c?

- $f(x)$

$g(x) = 3 f(x) + 1$

$-f(x)$

ES. 50



$f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\log_b(x)$ $b > 1$. $\lim_{x \to +\infty} \log_b(x) = +\infty$

$\left(\frac{a}{x}\right) \to 0 \qquad a>0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = c.$

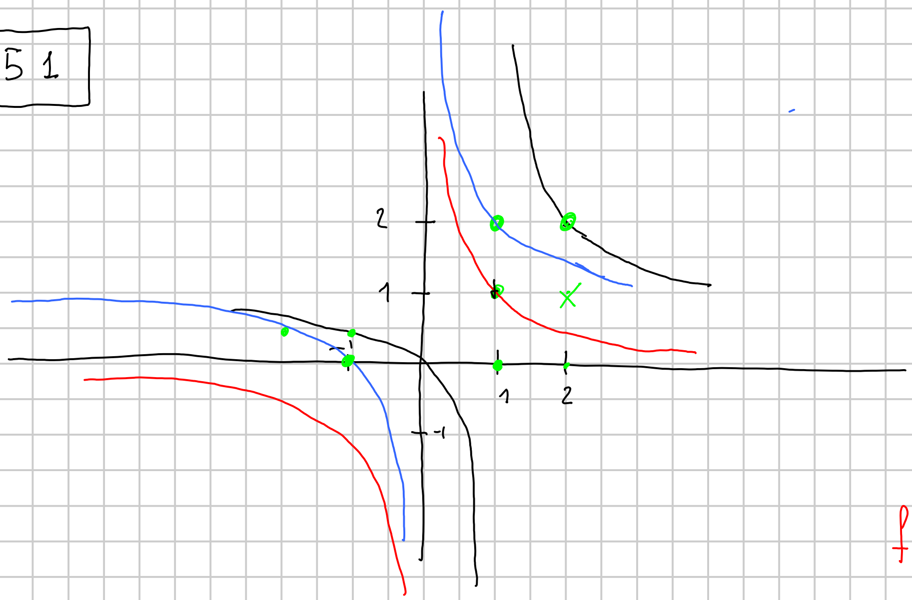
$f(x) = \log_b x$

$\log_b(1) = 0$

$\log_b(4) = 1$ QUINDI $b = 4$

$\log_4(a)$

$\boxed{51}$



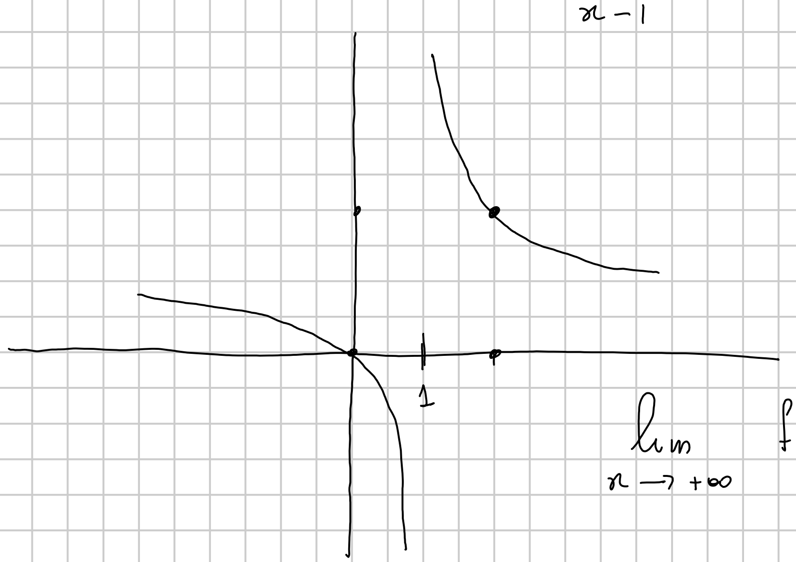
$f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \frac{1}{x} + 1$

$\boxed{h(x+1) = g(x)}$

$h(2) = g(1)$

$h(x) = g(x-1) = \frac{1}{x-1} + 1$



$g(x) = \frac{a}{x+b} + c$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ DAL GRAFICO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x+b} + c = c$$

$$\boxed{c = 1}$$

PER $x = 1$ la funzione $f(x)$ NON È DEFINITA

$\frac{a}{x+b} + 1$ NON È DEFINITA PER $x = -b$

QUINDI $b = -1$

$$\frac{a}{x-1} + 1$$

$f(2) = 2$ $\quad \frac{a}{1} + 1 = 2 \quad a = 1$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$$

$$\int_3^5 \frac{e^x \log(e^x - 3)}{e^x - 3} \, dx$$

PROVATE A FARLO PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b f(g(x)) \, g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy \qquad (*)$$

g bigettiva $\quad \int_a^b f(g(x)) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, (g^{-1})'(y) \, dy$

$$\int_3^5 \frac{\log(e^x-3)}{e^x-3} e^x \, dx = \int_3^5 f(g(x)) \, g'(x) \, dx$$

- $g(x) = e^x - 3$ $\qquad f(y) = \dfrac{\log(y)}{y}$

$g'(x) = e^x$

$$= \int_{g(3)}^{g(5)} f(y) \, dy = \boxed{\int_{e^3-3}^{e^3-5} \frac{\log y}{y} \, dy} \longrightarrow$$

- $g(x) = \log(e^x - 3)$ $\qquad f(y) = y$

$x \longrightarrow e^x - 3 \quad y \longrightarrow \log y$

$g'(x) = e^x \dfrac{1}{y} = \dfrac{e^x}{e^x-3}$

$$\int_3^5 f(g(x)) \, g'(x) = \int_3^5 \log(e^x-3) \underbrace{\boxed{\frac{e^x}{e^x-3}}}_{g'} dx$$

$$= \int_{g(3)}^{g(5)} y \, dy. = \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{g(3)}^{g(5)}$$

$$\int_3^5 \frac{\log(e^x-3)}{e^x-3} e^x \, dx = \int_{g(3)}^{g(5)} \frac{\log(y)}{y} \, dy = \int_{g(3)}^{g(5)} \underbrace{\frac{1}{y}}_{f} \cdot \log(y) \, dy.$$

G

$$= \int_{g(3)}^{g(5)} \underbrace{\log(x)}_{f(g(x))} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} dx = \int_{\log(g(3)) = e}^{\log(g(5)) = b} y \, dy = \left[\frac{1}{2} y^2\right]_e^b$$

$g(x) = \log(x)$ $f(y) = y$