FUNZIONI

Siano A e B due insiemi. Una funzione da A a B è una "regola" che associa ad ogni elemento di A un elemento di B. L'espressione "regola" è un po' impropria qui, perché fa pensare a un procedimento che dato un elemento di A permette di calcolare un elemento di B. La definizione di funzione è in realtà più generale di così, ma questa definizione intuitiva di funzione è sufficiente per gli scopi del corso.

Se f è una funzione da A a B scriviamo

$$f : A \longrightarrow B$$

e se $a \in A$ indichiamo con $f(a)$ l'elemento di B associato ad a.

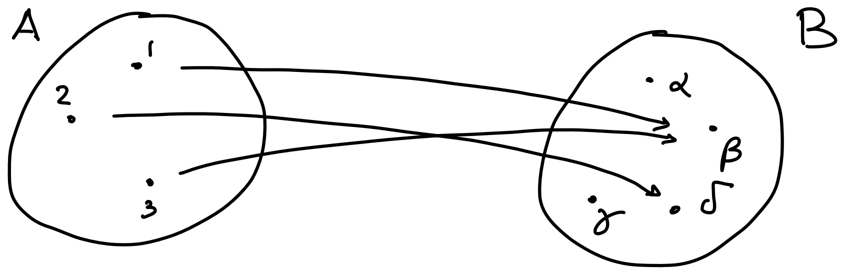
Esempi

① $\quad A = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

Definisco $f : A \longrightarrow B$ nel seguente modo

$$f(1) = \beta \qquad f(2) = \delta \qquad f(3) = \beta$$

In questo caso possiamo anche rappresentare graficamente la funzione nel seguente modo



② Sia $A = \{$parole della lingua italiana$\}$

e sia $B = \{$lettere dell'alfabeto$\}$

e $f: A \longrightarrow B$

è definita nel seguente modo:

$f($parola$) = 1^a$ lettera della parola

Per esempio

$f($"carta"$) = c$

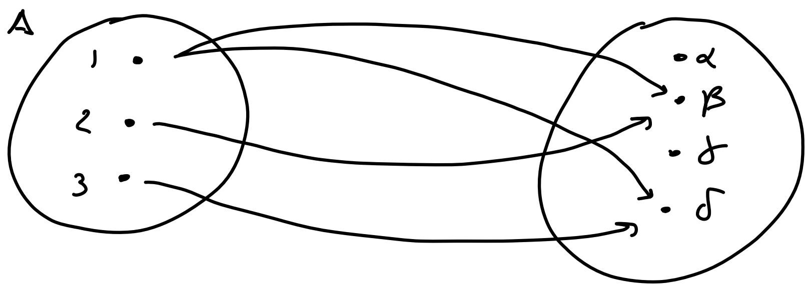
$f($"banco"$) = b$

③ Se $A = B = \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita mediante

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + e^x & \text{se } x \geq 3 \\ x-1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \text{ e } x < 3 \\ x & \text{se } x < 3 \text{ e } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

(4) Sia $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

Il disegno seguente è la rappresentazione grafica di una funzione ?



Svolg. No perché $f(1)$ non è definito per bene. Potrebbe essere β oppure δ.

FUNZIONI DI VARIABILE REALI E SUCCESSIONI

Nel primo semestre studieremo solo due classi di funzioni:

- Le funzioni f da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Queste si chiamano <u>successioni</u> e spesso invece di scrivere $f(n)$ si scrive f_n.

<u>Esempio</u> Sia a la successione delle potenze di 2. ovvero $a_n = \sqrt{2}^n$
Per esempio $a_3 = 2^3 = \sqrt{2}^3$ che è circa 2,82

- Le funzioni di variabile reale ovvero le funzioni da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Un po' più in generale studieremo funzioni $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dove A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

<u>Esempio</u> $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 7x + 2$

$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$

dove $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, +\infty)$ è l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ maggiori o uguali di zero.

Funzioni iniettive e surgettive

Una funzione $f: A \to B$ si dice surgettiva se ogni elemento di B è l'immagine di un elemento di A, ovvero se

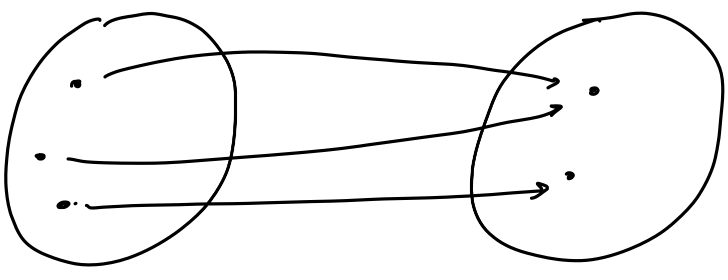
$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b.$$

Una funzione $f: A \to B$ si dice iniettiva se manda elementi distinti in elementi distinti, ovvero se $\forall a, \alpha \in A$ se $a \neq \alpha$ allora $f(a) \neq f(\alpha)$

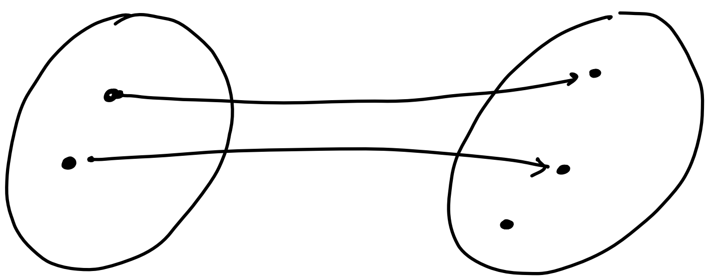
C'è un modo equivalente per descrivere questa proprietà che spesso risulta utile:

$\forall a, \alpha \in A$ se $f(a) = f(\alpha)$ allora $a = \alpha$.

Esempio

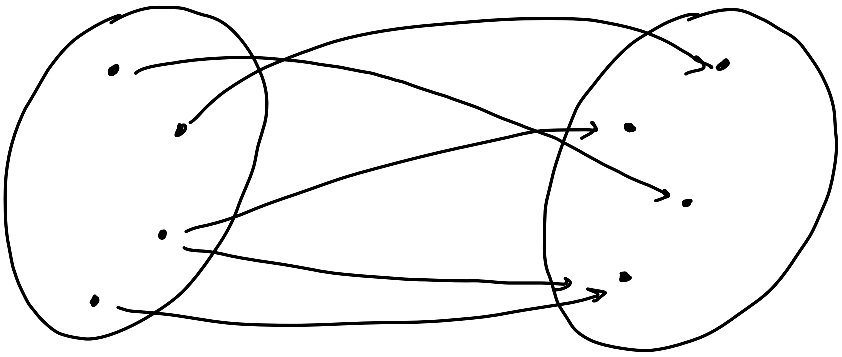


esempio di una funzione surgettiva ma non iniettiva

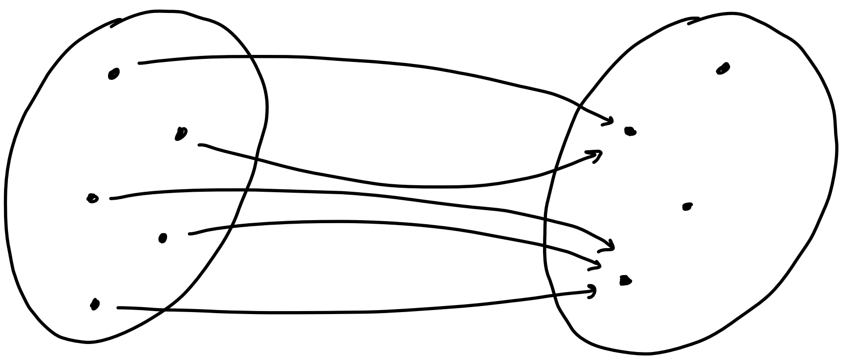


esempio di funzione iniettiva ma non surgettiva

<u>Esercizio</u> quali dei seguenti disegni sono la rappresentazione grafica di una funzione? quali di una funzione iniettiva? e quali di una funzione surgettiva?



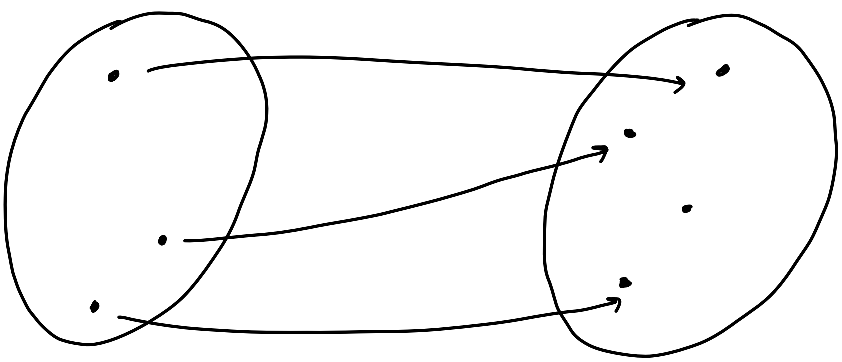
NON È UNA FUNZIONE



È UNA FUNZIONE

NON È INIETTIVA

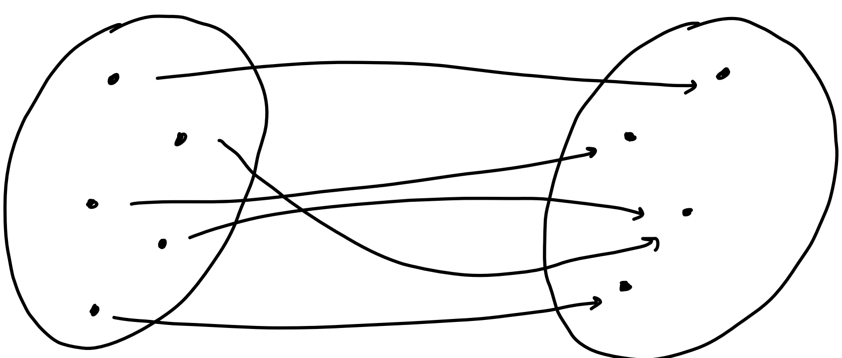
NÉ SURGETTIVA



È UNA FUNZIONE

INIETTIVA MA NON

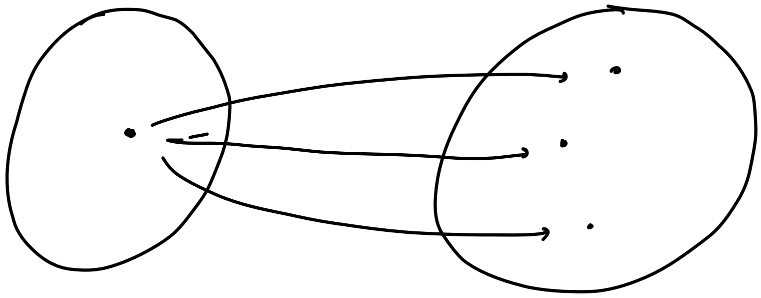
SURGETTIVA



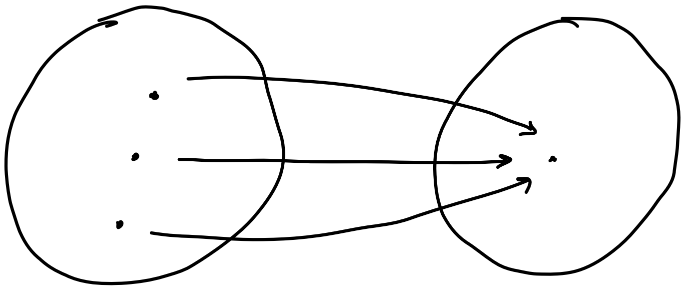
È UNA FUNZIONE

SURGETTIVA MA NON

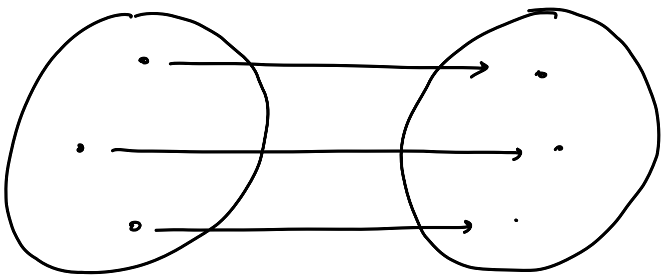
INIETTIVA



.....



.....



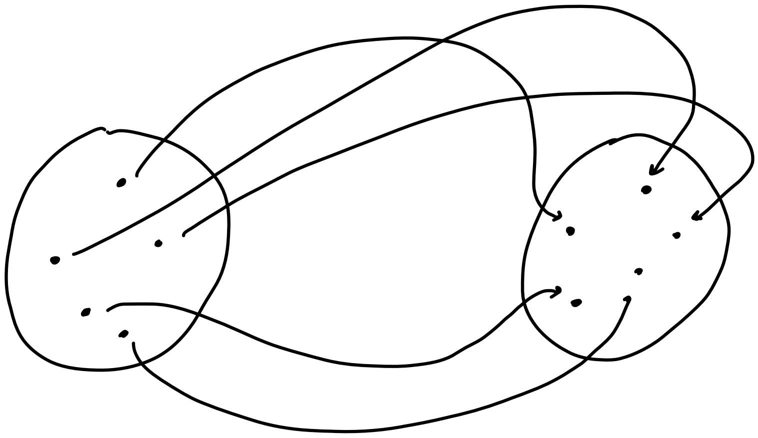
.....

Funzioni bigettive e funzione inversa

Una funzione si dice bigettiva se è sia iniettiva che surgettiva. Se esplicitiamo queste due proprietà troviamo che una funzione $f: A \longrightarrow B$ è bigettiva se e solo se per ogni elemento b di B esiste un unico elemento di A che ha come immagine b. Ovvero se

$$\forall b \in B \quad \exists_1\, a \in A \quad \text{tale che} \quad f(a) = b.$$

Esempio



Esempio

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = 3x + 5$$

è bigettiva.

svolgimento

In questo caso $A = B = \mathbb{R}$. Quindi la definizione di bigettività si scrive:

$$\forall\, b \in \mathbb{R} \quad \exists_1\, a \in \mathbb{R} \text{ tale che } \quad 3a + 5 = b.$$

Quindi si tratta di vedere quante soluzioni ha l'equazione

$$3a + 5 = b$$

L'equazione, in questo caso è molto semplice, è equivalente a

$$3a = b - 5$$

e quindi ha come unica soluzione

$$a = \frac{b-5}{3}$$

$\#$

Quando $f: A \to B$ è una funzione bigettiva allora possiamo definire una funzione $g: B \to A$ con la regola

$$g(b) = a \quad \text{se} \quad f(a) = b.$$

La funzione g così costruita si chiama funzione inversa e si indica con f^{-1}.

<u>NOTA</u> La notazione f^{-1} si può confondere con la notazione per il reciproco di un numero $\frac{1}{a}$ che si indica anche con a^{-1}. Ma sono due cose completamente diverse.

<u>Esempio</u>

$$A = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$f: A \to B \qquad f(1) = \beta \qquad f(2) = \gamma \qquad f(3) = \alpha$$

allora $f^{-1}(\alpha) = 3 \qquad f^{-1}(\beta) = 1 \qquad f^{-1}(\gamma) = 2$.

<u>Esempio</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 3x + 5$.

Allora $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3}$

<u>svolgimento</u> Abbiamo già visto in un esempio precedente che $f(a) = b$ se e solo se $a = \dfrac{b-5}{3}$

e quindi $f^{-1}(b) = \dfrac{b-5}{3}$

#

Composizione di funzioni

Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$ due funzioni. Allora possiamo costruire una nuova funzione

$$h: A \longrightarrow C$$

definita da

$$h(a) = g(f(a))$$

ovvero prima calcolo $b = f(a)$ e poi calcolo $g(b)$. La funzione così ottenuta si chiama la funzione composta e si indica con

$$g \circ f$$

si legge f composto g.

Esempio

$A = \{\text{persone}\}$ $\quad B = \{\text{parole}\}$ $\quad C = \{\text{lettere}\}$

$f: A \to B$ associa ad ogni persona il suo nome

$g: B \to C$ associa ad ogni parola la prima lettera

$h = g \circ f : A \longrightarrow B$ associa ad ogni persona l'iniziale del nome.

Esempio

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(n) = 2n+1$

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad g(n) = n^2 + 2$.

Allora $g \circ f(n) = g(f(n))$

$$= g(2n+1)$$

$$= (2n+1)^2 + 2 \qquad *$$

$$= 4n^2 + 4n + 3$$

Spiego meglio il passaggio indicato con *

$$f(n) = 2n+1 = m \quad \text{e}$$

$$g(m) = m^2 + 2 = (2n+1)^2 + 2$$

#