Indicazioni su programma e riferimenti a note, appunti e al libro di Abate

Prima settimana. In questa settimana abbiamo fatto alcuni richiami su argomenti di base: numeri naturali, interi, razionali e reali. Come si scrive un numero periodico come frazione. Cosa e' una percentuale. Cosa succede se una quantita prima aumenta e poi diminuisce di una stessa percentuale p. Come evolve una popolazione che ogni anno aumenta della stessa percentuale. Abbiamo ricordato cosa il significato di x^a per $x > 0$ e a un numero naturale, intero, razionale e abbiamo dato qualche cenno sul caso di a reale. Abbiamo iniziato a richiamare qualche notazione relativa alla teoria degli insiemi.

Per chi segue il corso settimanalmente possono essere utili le note di Tommei sugli interi e i razionali e quelle sulle percentuali, che trovate tra le note, e le schermate delle lezioni. Il mio suggerimento è comunque di tenere degli appunti delle lezioni, e a sistemarli e rivederli per conto vostro. Le note e le schermate possono essere di aiuto se vi siete persi qualcosa.

Per chi non segue le lezioni credo le note che trovate siano un po' scarne, è forse meglio guardare un libro. Se per guardate il libro di Abate, il materiale che abbiamo coperto questa settima lo ritrovate nella sostanza nelle sez. 0.1 (capitolo 0, sezione 1), 1.3, 1.7.

Seconda settimana. In questa settimana abbiamo richiamato alcune definizioni sugli insiemi e abbiamo iniziato a studiare le funzioni da R a R. Per la parte sugli insiemi potete guarda la prima parte delle note sugli insiemi o le schermate delle lezioni. Per la parte sulle funzioni la nostra impostazione sara' molto simile a quella del libro di Abate, capitoli 5 e 6. Il libro contiene piu' cose di quelle che noi faremo, ma non molte di piu' e sia l'impostazione che l'ordine degli argomenti che faremo per tutta questa parte (non solo questa settimana) e' molto simile. Piu' precisamente le sezioni del libro interessate sono la 1.8 (Insiemi), la 2.1, la 2.4, la 5.1.

Questa settimana gli esercizi sono 8, inizierò la correzione dagli ultimi tre.

Terza settimana. In questa settimana abbiamo ricolrdato cosa sono le funzioni quadratiche e cosa sono le funzioni razionali, soffermandoci in particolar modo sulle prime. Abbiamo inoltre dato alcune definizioni generali: massimo e minimo e massimo e minimo locale, funzioni crescenti o descrescenti in un intervallo, funzioni convesse, limite di una funzione per x che tende a piu' o meno infinito. Questa parte e' trattata nelle sezioni 5.1, 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6.

Se riuscite a fare tutti e sei gli esercizi proposti sarebbe un'ottima cosa.

Quarta settimana. In questa settimana abbiamo definito cosa e' un limite, ricordato alcuni limiti importanti, dato la definizione di e richiamato qualche proprietà della funzione esponenziale. Potete trovare questi argomenti nelle sezioni 5.7 e 6.1 del libro di Abate o piu' sinteticamente nelle slides di Tommei che trovate nella cartella sulle note alla pagina web del corso.

Quinta settima. In questa settimana abbiamo studiato la funzione esponenziale, la funzione logaritmo e le funzioni seno, coseno e tangente. Abbiamo anche studiato come e' fatto il grafico di queste funzioni, e in generale come e' fatto il grafico della funzione inversa. Questo materiale lo potete trovare nelle sezioni: 6.1, 6.3 e 6.4. Nel libro ci sono piu' cose di quelle che abbiamo fatto in classe. Soprattutto e' bene sapere molto bene come e' fatto il grafico di queste funzioni. Trovate anche degli appunti sulle funzioni, che parlano di funzioni inversa e funzioni bigettive e degli appunti di Tommei sulle funzioni esponenziali e le schermate delle lezioni.

Ci sono sei esercizi, i primi tre dovrebbe essere abbordabili e i secondi tre un po' piu' difficili.

Sesta settimana. In questa settimana abbiamo solo corretto esercizi, e non abbiamo fatto argomenti nuovi. Ho aggiunto qualche esercizio che coprono un po' tutto quello che abbiamo fatto fino adesso. Credo possa essere utile fare almeno gli ultimi due esercizi.

Settima settimana. In questa settimana abbiamo introdotto la derivata di una funzione e imparato a calcolare alcune derivate. Questi argomenti li trovate spiegati nelle sezioni 7.1, 7.2, e 7.3 del libro di Abate.

Ottava settimana. In questa settimana abbiamo imparato a calcolare la derivata della funzione composta e della funzione inversa e abbiamo utilizzato le derivate per determinare alcuni punti di massimo o minimo di una funzione. Questi argomenti li trovate spiegati nella sezione 7.3 del libro di Abate.

Vi consiglio di fare i primi due esercizi e almeno un paio di esercizi nei quali sia previsto il calcolo di qualche derivata.

Nona settimana. In questa settimana abbiamo definito l'integrale e spiegato il teorema fondamentale del calcolo integrale. Trovate questi argomenti spiegati nelle sezioni 8.1,8.2 e 8.3 del libro di Abate.

Decima settimana. In questa settimana abbiamo imparato alcune tecniche per calcolare gli integrali: essenzialmente l'integrazione per parti e per sostituzione. Trovate questi argomenti trattati nel libro di Abate nelle sezioni 8.3, 8.4 e 8.5.

Undicesima settimana. In questa settimana abbiamo introdotto le equazioni differenziali e visto alcuni esempi. Potete trovare questo argomento trattato nelle sezioni 9.1 e 9.2 del libro di Abate.

Oltre agli esercizi dell'undicesima settimana ho aggiunto il testo di un compitino dell'anno scorso che potete fare integralmente tranne l'esercizio 75 che impareremo a risolvere la prossima settimana.

Dodicesima settimana. In questa settimana abbiamo studiato due modelli di crescita di una popolazione di batteri utilizzando le equazioni differenziali. Questi argomenti li trovate trattati nella sezione 9.3 del libro di Abate.

Oltre agli esercizi della dodicesima settimana potete fare gli esercizi dei compitini degli anni passati che ho aggiunto in fondo a questo file. Dovreste poter fare uno qualsiasi di questi esercizi anche se alcuni sono formulati con un linguaggio diverso di quello che abbiamo usato noi. In questi caso ho aggiunto un commento. La settimana prossima correggerò sicuramente gli esercizi 66, 67, 69, 70, 71, 87 e 89. Mi aspetto che soprattutto per l'esercizio 66, il 71 e l'89 qualcuno di voi possa trovare, al momento, qualche difficoltà in più rispetto al solito.

Tredicesima settimana. In questa settimana abbiamo studiato uno dei più semplici modelli di diffusione di un virus, vedendo come si può formalizzare tale processo utilizzando le equazioni differenziali. Questa breve discussione non si trova sul libro di Abate e pertanto non fa parte del programma.

Oltre agli esercizi relativi a questa settimana ho aggiunto il testo di due altri compitini. Valgono le stesse avvertenze fatte la settimana scorsa. Consiglio, in particolare di fare gli esercizi,

Quattordicesima settimana. In questa settimana abbiamo corretto gli esercizi assegnati per casa.

Quindicesima settimana. In questa settimana abbiamo corretto il compitino e iniziato lo studio della probabilità discreta. Sono stati introdotti i concetti di evento semplice, evento composto, eventi indipendenti e eventi incompatibili. Potete trovare spiegati questi argomenti nel capitolo 10 de libro di Abate, sezioni 1,2,3,5,6.

Sedicesima settimana. In questa settimana svolti alcuni esercizi di probabilità riguardanti il lancio di una moneta, di una dado e dei giochi tipo lotto. Abbiamo inoltre introdotto il concetto di probabilita' condizionata. Potete trovare questi argomenti sul libro di Abate, capitolo 10, sezioni 8 e 10. Consiglio di fare almeno il primo, il terzo e il quinto esercizio di questa settimana.

Diciassettesima settimana. In questa settimana abbiamo parlato ancora di probabilità condizionata, fatto la formula di Bayes e parlato di applicazioni della probabilità a problemi di genetica. Questo materiale lo trovate nel libro di Abate, capitolo 10, sezioni 7 e 8.

Esercizi prima settimana

Esercizio 1. Scrivere come frazioni i seguenti numeri:

$$12,35 \qquad 15,1\bar{2} \qquad 0,01\overline{423}.$$

Esercizio 2. Calcolare $16^{-3/4}$ e $625^{3/4}$.

Esercizio 3. La popolazione di una regione diminuisce ogni anno del 5 per cento. Sapendo che nell'anno 2000 la popolazione è di 1.000.000 calcolare la popolazione nel 2010 e nel 1990.

Esercizio 4. In termini relativi, una popolazione ogni anno aumento di un fatto $0,1$. Sapendo che nell'anno 2000 la popolazione è di 100.000 abitanti, calcolare la popolazione nell'anno 2015 e nell'anno 1992.

Esercizio 5. Una popolazione di una regione diminuisce ogni anno del 4 per cento. In percentuale, di quanto diminuisce in 20 anni?

Esercizio 6. Se una popolazione aumenta in un anno del 5 per cento, di quanto deve diminuire nell'anno successibo per tornare al valore dell'anno precedente?

Esercizi seconda settimana

Esercizio 7. Sia $A = \{3, 6, 8\}$ e $B = \{3, 7, 9\}$. Si elenchino gli elementi dei seguenti insiemi:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \smallsetminus B, \quad A \times (A \smallsetminus B).$$

Esercizio 8. Sia $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 8 = 0\}$ e sia $D = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \in C\}$ ed $E = \{x + 1 : x \in C\}$. Si elenchino gli elementi di C, D ed E.

Esercizio 9. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

$$\sqrt{2} \in (\sqrt{2}, +\infty), \quad \sqrt{2} \in (-\infty, \sqrt{2}), \quad \sqrt{2} \in (1, +\infty), \quad \sqrt{2} \in (-\infty, \sqrt{2}], \quad \sqrt{2} \in (1, 2), \quad \sqrt{2} \notin [1, \sqrt{2}).$$

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione lineare tale che $f(2) = 4$ e $f(8) = 6$. Determinare la funzione f, ovvero determinare il coefficiente angolare e l'intercetta all'origine della funzione. Si determini inoltre quanto vale $f(10)$.

Esercizio 11. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione lineare tale che $f(1) = 3$ e $f(3) = 7$.

- Determinare per quale valore di x la funzione f si annulla.
- Determinare per quale valore di x la funzione f è positiva

Esercizio 12. Nello, un contadino della piana pisana, vuole studiare la relazione tra la produzione di pomodori del suo orto, e la quantità di acqua con cui li annaffia. Ha preparato due campiche si trovano in condizioni simili. Il primo l'ha annaffiato con 5 litri per pianta e produce 4 chili di pomodori per pianta alla settimana, il secondo con 8 litri e produce 6 chili di pomodori a settimana per pianta.

Nello, che è portato per la matematica, ma ha studiato poco alle superiori, ipotizza che tra la quantità di acqua e la produzione per settimana ci sia una relazione lineare. Determinare la funzione f che esprime questa relazione lineare.

Esercizio 13. Nello, il contadino della piana pisana dell'esercizio precedente, vorrebbe ottenere una produzione di 10 chili per pianta a settimana. In base ai dati e alle ipotesi dell'esercizio precedente quanta acqua dovrebbe fornire a ogni pianta?

Esercizio 14. Nello, il solito contadino, riflettendo sui dati tra la produzione di pomodori e la quantità di acqua con cui li annaffia, ha dei dubbi sulla correttezza dell'ipotesi che ci sia una relazione lineare tra queste due quantità. Secondo te fa bene ad avere questi dubbi? Perché?

Esercizi terza settimana

Esercizio 15. Sia $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$. Determinare per quali x la funzione si annulla, per quali x la funzione è positiva, il punto di minimo e il valore minimo.

Esercizio 16. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione quadratica. Sapendo che $f(-1) = -4$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -1$ determinare f. Dire se f ha massimo e in tal caso determinare il punto di massimo. Dire se f ha minimo e in tal caso determinare il punto di minimo.

Esercizio 17. Nello, il solito contadino, ipotizza che se non fornisce acqua alle piante i pomodori non cresceranno. Ipotizza quindi che la relazione tra innaffiamento e produzione di pomodori sia quadratica e ne ricava una formula esplicita. In base a questi calcoli per quale quantità di acqua fornita alle piante di pomodori si ottiene il massimo della produzione?

Esercizio 18. Discutere se l'ipotesi di relazione quadratica fatta da Nello, sia sensata. Fare una proposta, che non si discosta troppo da quella di Nello per renderla perlomeno plausibile.

Esercizio 19. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fuznione $(x-1)^2(x-2)(x+1)$. Determinare per quali valori di x la funzione si annulla e per quali è positiva. Determinare almeno un punto di massimo locale.

Esercizio 20. Dare la definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

Esercizi quarta settimana

Esercizio 21. Si vuole studiare come varia la concentrazione di un parametro Y in una sostanza al variare dell'illuminazione X. Si sanno le seguenti cose:

- I due paramatri sono sempre maggiori o uguali a zero (misurano una concentrazione e l'illuminazione)
- Se $X = 0$ anche Y è zero.
- Y cresce al crescere di X.
- il valore di X può crescere indefinitamente mentre quello di Y non può superare una qualche soglia.

In base a queste informazioni quale delle seguente funzioni potrebbe descrivere la relazione tra X e Y (potrebbe essere anche più d'una)

$$f(x) = x \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = e^{-x} - 1 \qquad \ell(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \qquad m(x) = 1 - e^{-x}$$

Esercizio 22. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + x + 1}{x^3 + 2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3 + x + 1}{x^2 + 2}$$

Esercizio 23. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x} + e^x + 1}{e^3 x + 2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3e^{3x} + e^x + 1}{e^{2x} + 2}$$

Esercizio 24. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = 3 - (e^x + 1 + x^2)(e^x - 1)^2$$

Se ne determini il punto di massimo e il valore massimo.

Esercizio 25. Dire se secondo voi la funzione

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 5$$

assume il valore zero e se ha massimo o minimo. Cercare di motivare la risposta.

Esercizi quinta settimana

Esercizio 26. Si calcolino i seguenti numeri senza usare la calcolatrice.

$$\log_4(64), \qquad \log_{0,5}(2), \qquad \cos(2\pi/3).$$

Esercizio 27. Si consideri la funzione $f(x) = \log_2(x^2+1)$. Se ne calcoli il valore (anche con la calcolatrice) per $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Si calcoli il limite di f per x che tende a piu‘ o meno infinito. Si usino queste informazioni per fare un grafico della funzione f.

Esercizio 28. Si disegni il grafico di una funzione con le seguenti caratteristiche:

- $f : [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$, $f(2) = 2$, $f(-2) = -1$.
- f ha un punto di massimo assoluto in $x = 2$ e un punto di minimo assoluto in $x = 5$.
- Le soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ sono $x = -4$, $x = -1$ e $x = 4$.

Esercizio 29. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{1+2^x}$$
. Calcolare il valore della funzione per $x = -2, -1, 0, 1, 2$. Calcolare i limiti della funzione per x che tende a piu' o meno infinito. Usare queste informazioni per provare ad abbozzare il grafico della funzione. Dire se la funzione ha massimo o minimo e in caso determinarli.

Esercizio 30. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ha le seguenti proprietà

- f è sempre strettamente positiva, cioè $f(x) > 0$ per ogni x.
- f è crescente
- $f(0) = 1$
- il limite per x che tende a più infinito di $f(x)/x$ è uguale a uno.

Quali delle seguenti funzioni potrebbe essere?
$$f(x) = e^x, \qquad f(x) = \log_2(1+2^x), \qquad f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$$

Esercizio 31. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione con le seguenti proprietà

(1) $f(x+1) = f(x)$ per ogni x.
(2) $f(1) = 0$.

Disegnare il grafico di una funzione con queste caratteristiche. Proporre una formula che vada bene per f (ovviamente ce ne sono tantissime che vanno bene, basta proporne una).

Esercizi sesta settimana

Esercizio 32. Una popolazione, aumenta ogni anno dello stesso valore percentuale. Sapendo che la popolazione in dieci anni raddoppia, calcolare l'aumento annuo in percentuale.

Esercizio 33. Si consideri la funzione $f(x) = 2^x + 2^{-x}$. Se ne calcoli il valore in $x = -2, -1, 0, 1, 2$. Se ne calcoli il limite per x che tende a più o meno infinito. Se ne abbozzi un grafico.

Si provi a dimostrare che 0 è un punto di minimo. [quest'ultimo punto e' piu' complicato degli altri esercizi simili che abbiamo fatto in precedenza]

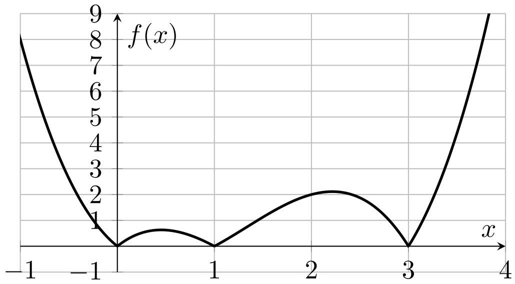
Esercizio 34. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con le seguenti proprietà:

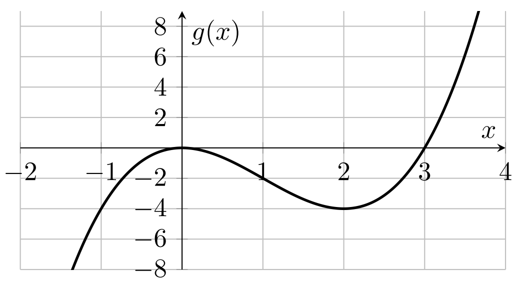
- $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1, 2, 3$.
- $f(x) \geqslant 0$ per ogni x.
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Di quali delle seguenti funzioni potrebbe trattarsi?

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2 \qquad f(x) = e^{-(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2} \qquad f(x) = e^{-x}(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

Esercizio 35. Le funzioni $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hanno i seguenti grafici.

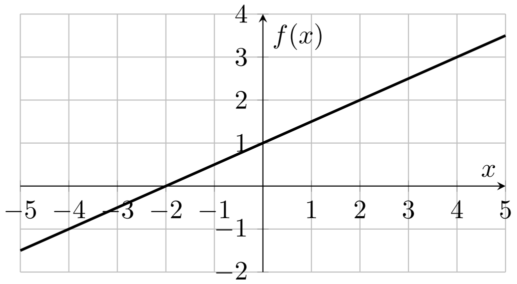


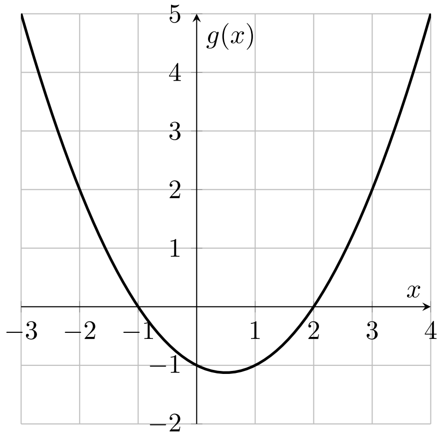


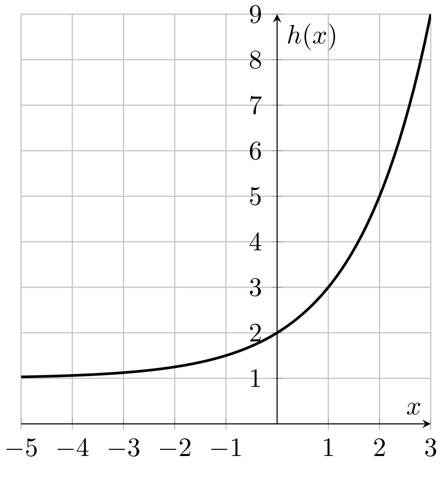
- Si determini il valore delle funzioni in $x = -1, 0, 1$.
- Si determino i punti in quali le funzioni si annullano, ovvero gli x tali che $f(x) = 0$ e in quali intervalli le funzioni sono strettamente positive.
- Si determino gli intervalli in cui le funzioni sono crescenti e quelli in cui sono decrescenti.
- Si determino eventuali punti di massimo e minimo o eventuali punti di massimo e minimo locale.

[Non sempre sara‘ possibile determinare questi dati in modo esatto dalla figura, fare il meglio che si può]

Esercizio 36. Le funzioni $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hanno i seguenti grafici.



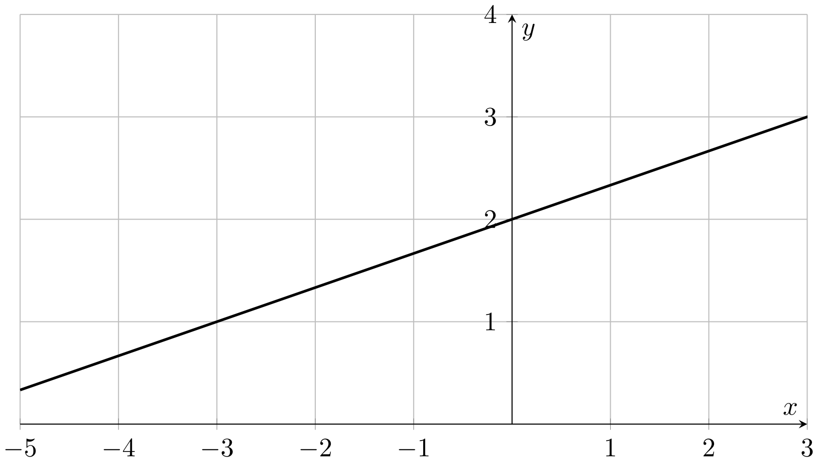


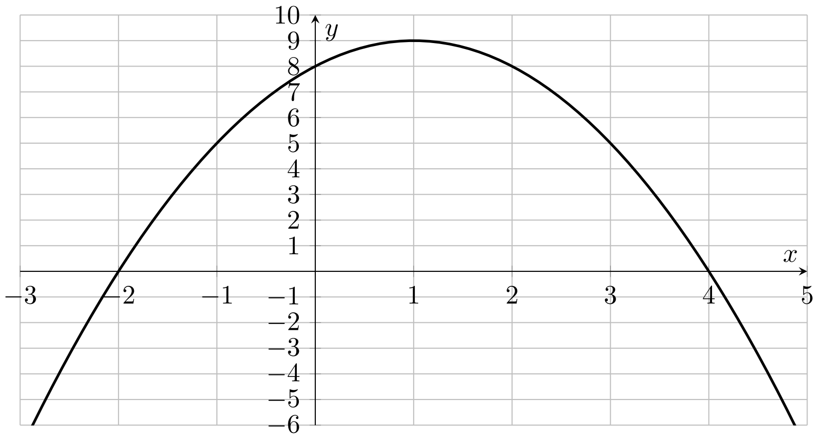


Si provi a determinare di quali funzioni si tratta.

Esercizi settima settimana

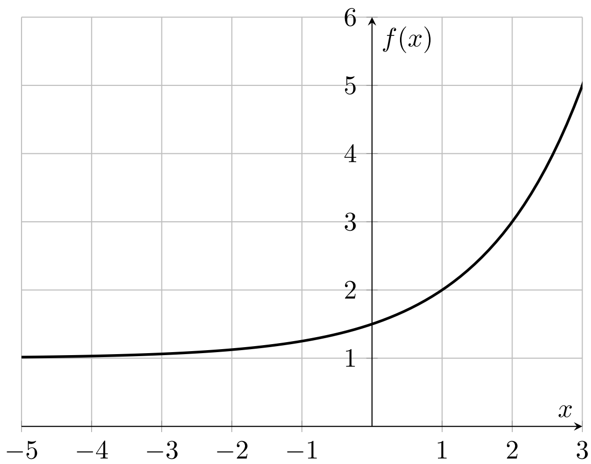
Esercizio 37. Le due funzioni $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hanno una la forma $ax + b$ e l'altra la forma $cx^2 + dx + e$ ed hanno i grafici seguenti:





Determinare a, b, c, d, e.

Esercizio 38. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione della forma $f(x) = ab^x + c$ che ha il grafico seguente:

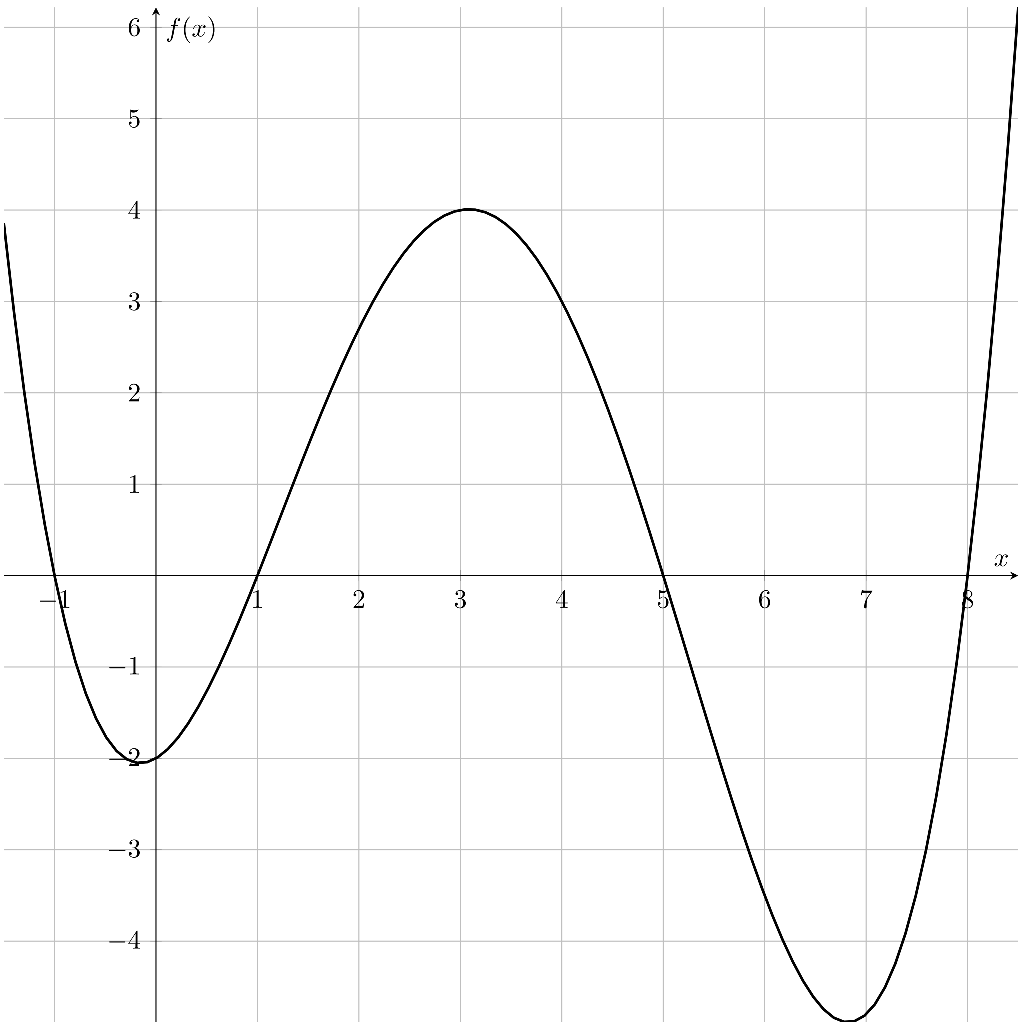


Determinare a, b e c.

Esercizio 39. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

- $f(x) = 5x^3 + x^2$;
- $f(x) = e^x + \log x$;
- $f(x) = (x^2 + 3)e^x$
- $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

Esercizio 40. Si consideri il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



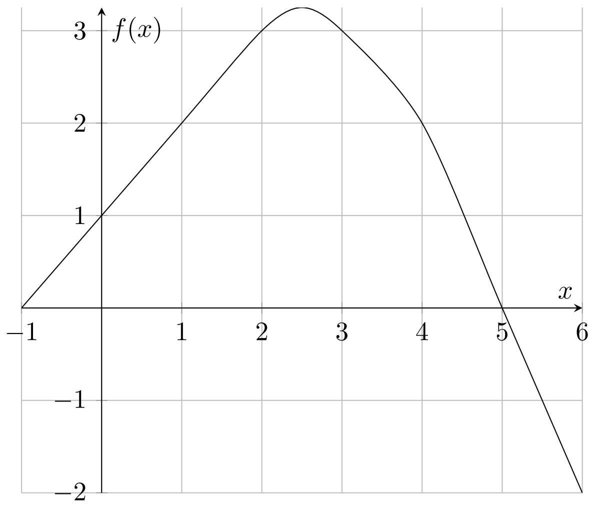
(1) Determinare in modo ragionevolmente accurato il valore di f nei punti $x = 1, 3, 5, 7$.
(2) Determinare le soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$ e $f(x = 0)$.
(3) Determinare in modo ragionevolmente accurato il valore della derivata della funzione f nei punti $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.
(4) Determinare in modo ragionevolmente accurato l'equazione della retta tangente al grafico di f per i punti di ascissa $1, 2, 3, 4$.
(5) Per quali valori di x la derivata si annulla?
(6) In quali intervalli la derivata è negativa e in quali è positiva?
(7) Per quali valori di x la derivata ha valore -0.5?

Esercizio 41. Utilizzando la formula per della derivata del prodotto o di un quoziente, dimostrare che per ogni numero reale λ e per ogni funzione derivabile f e g si ha:

$$D(\lambda f) = \lambda \qquad D(\frac{1}{f}) = -\frac{D(f)}{f^2} \qquad D(f - g) = D(f) - D(g).$$

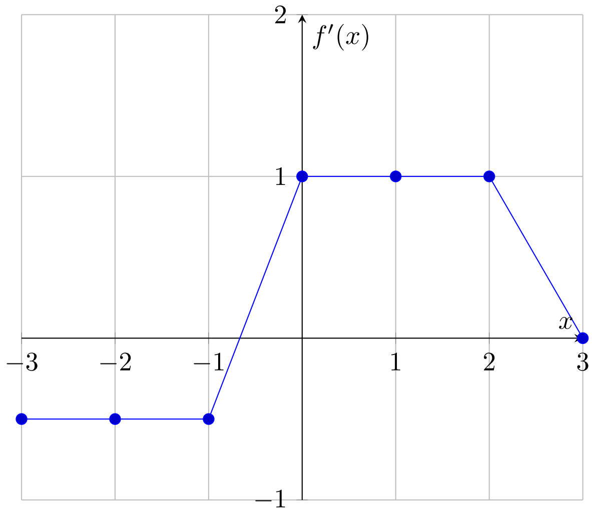
Esercizi ottava settimana

Esercizio 42. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ha il seguente grafico.



Disegnare un grafico approssimativo della funzione $f'(x)$.

Esercizio 43. La derivata della funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ha il seguente grafico. Sapendo che $f(0) = 0$ disegnare un grafico approssimativo della funzione f.



Esercizio 44. Per ogni coppia delle seguenti funzioni determinare le funzioni composte $h(x) = f(g(x))$ e $k(x) = g(f(x))$. Calcolare il valore di tale funzioni in $x = 0$ e $x = 1$ e quando possibile semplificare l'espressione ottenuta per h e k

(1) $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$;
(2) $f(x) = x^4 + x^2$ e $g(x) = \log(x + 1)$;
(3) $f(x) = e^x + e^{2x}$ e $g(x) = \log(x + 1)$;
(4) $f(x) = 5x + 1$ e $g(x) = x/5$.

Esercizio 45. Calcolare la derivata delle funzioni h e k nel caso (2) dell'esercizio precedente.

Esercizio 46. Sia $f : [0, \infty) \longrightarrow [2, \infty)$ la funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$. Dimostrare che è bigettiva, determinare la funzione inversa e calcolare la derivata della funzione inversa.

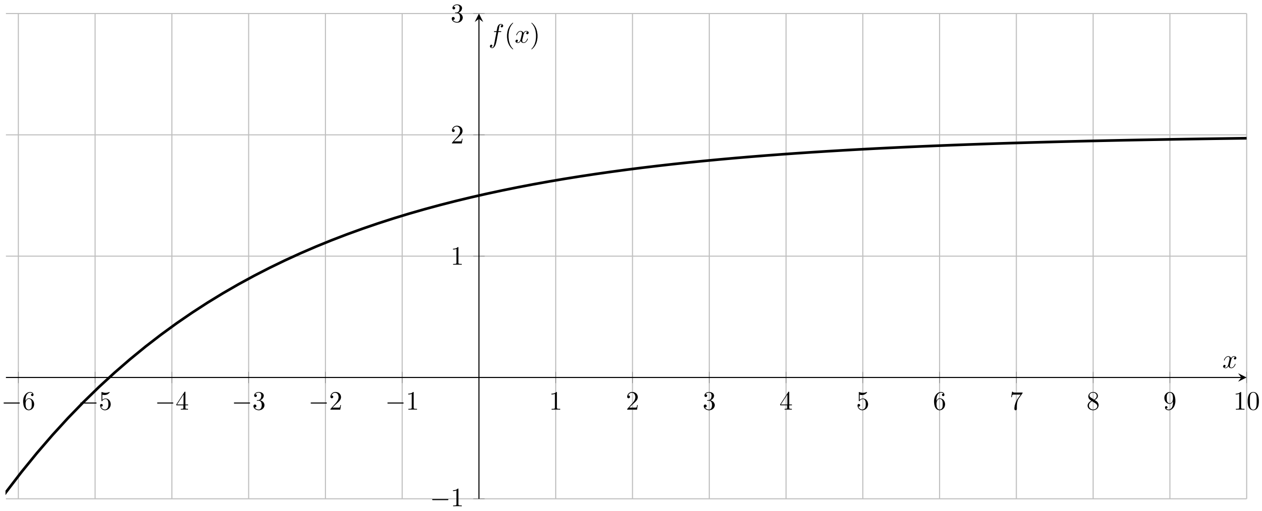
Esercizio 47 (I compitino 2021)**.** Determina gli intervalli in cui la seguente funzione è crescente o decrescente:

$$f(x) = \frac{x^2}{\log x}.$$

Esercizio 48 (II compitino 2021)**.** Determina gli intervalli in cui la seguente funzione funzione è crescente o decrescente e determina eventuali punti di minimo o di minimo locale:

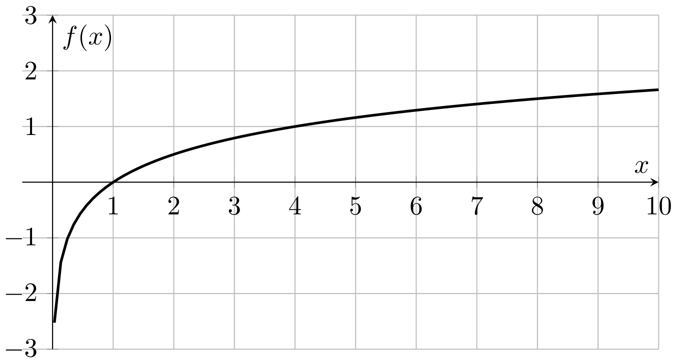
$$f(x) = e^{x^2-6x-7}.$$

Esercizio 49. In questo esercizio le derivate non c'entrano nulla. Il seguente grafico è il grafico di una funzione della forma $ax + b$ o della forma $ax^2 + bx + c$ o $ab^x + c$. Determina la funzione

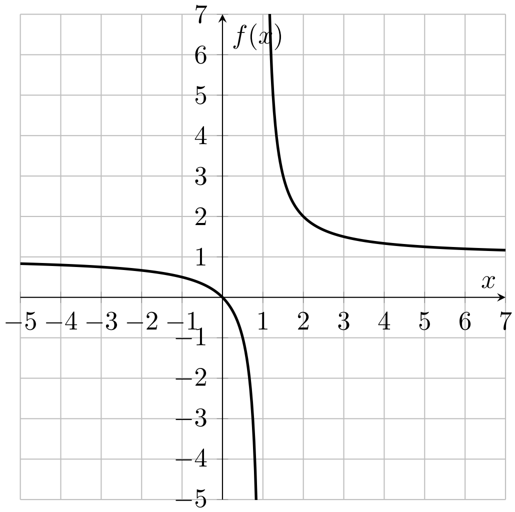


Esercizi nona settimana

Esercizio 50. La funzione $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ha il seguente grafico. Di che funzione si tratta?



Esercizio 51. La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ha il seguente grafico. Di che funzione si tratta?



Esercizio 52. Si calcoli $\int_{-5}^{3} (3x + 1)\, dx$

Esercizio 53. Sia $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Si calcoli $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. [Si disegni un grafico della funzione e si cerchi di riconoscere la figura.]

Esercizi decima settimana

Esercizio 54. Si calcolino i seguenti integrali (questo è un esercizio di ripasso sulle derivate)

$$\int_0^1 x^3\,dx \qquad \int_0^\pi \sin(x)\,dx \qquad \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \qquad \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \int_0^1 e^x\,dx$$

Esercizio 55. I seguenti integrali sono facili da calcolare procedendo per parti.

$$\int_0^1 x^3\,e^x\,dx \qquad \int_0^1 x\,\cos(x)\,dx$$

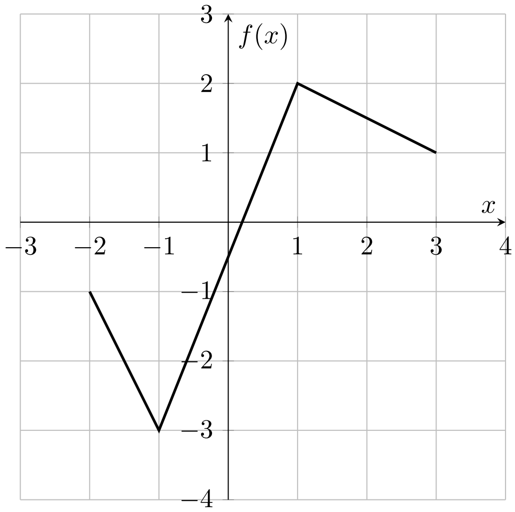
Esercizio 56. I seguenti integrali sono facili da calcolare per sostituzione

$$\int_0^{\pi/6} \cos(3x+\pi)dx \qquad \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})dx$$

Esercizio 57. Si consideri la funzione $f(x) = e^x(x+1)$. Se ne disegni un grafico approssimativo. Si calcoli l'area delimitata dall'asse delle ascisse, dalle rette $x = 0$ e $x = -2$ e dalla curva $y = f(x)$.

Esercizio 58. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(0) = 0$ e $f'(x) = xe^x$. Determinare f e calcolare $f(1)$.

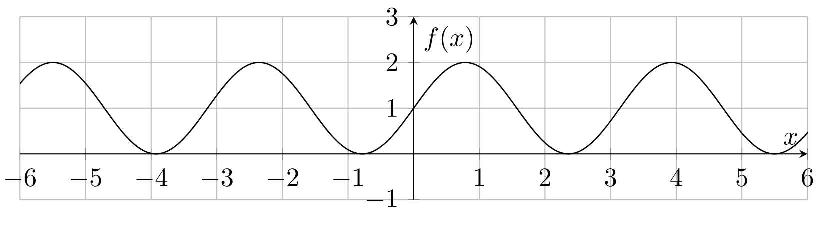
Esercizio 59. Sia $f : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione con il seguente grafico:



Sia $g : [-4, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = f(x+2)+1$ e sia $h : [-3, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $h(x) = -f(-x)$. Si disegni dei grafici accurati delle funzioni g e h.

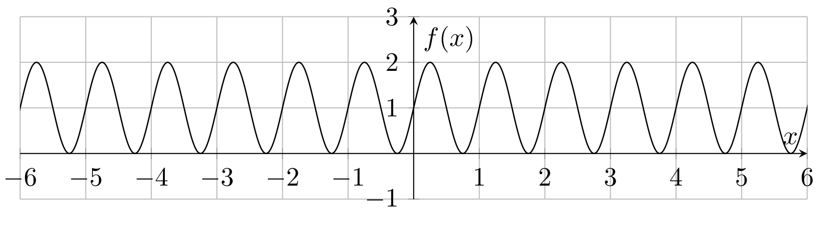
Esercizi undicesima settimana

Esercizio 60. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ il cui grafico è il seguente.



Di quale funzione si tratta?

Esercizio 61. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ il cui grafico è il seguente.



Di quale funzione si tratta?

Esercizio 62. (Tommei) Determina una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con le seguenti caratteristiche:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 4 \qquad f(0) = 2 \qquad f(2) = 0.$$

Esercizio 63. Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_0^1 \tan(x-1)dx \qquad \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1}{\tan(x)}dx$$

[Suggerimento: procedere per sostituzione dopo essersi ricordati la definizione di tangente in termini di seno e coseno]

Esercizio 64. Si risolva la seguente equazione differenziale:

$$f'(t) = 1 + t\log(t) \qquad f(1) = 1.$$

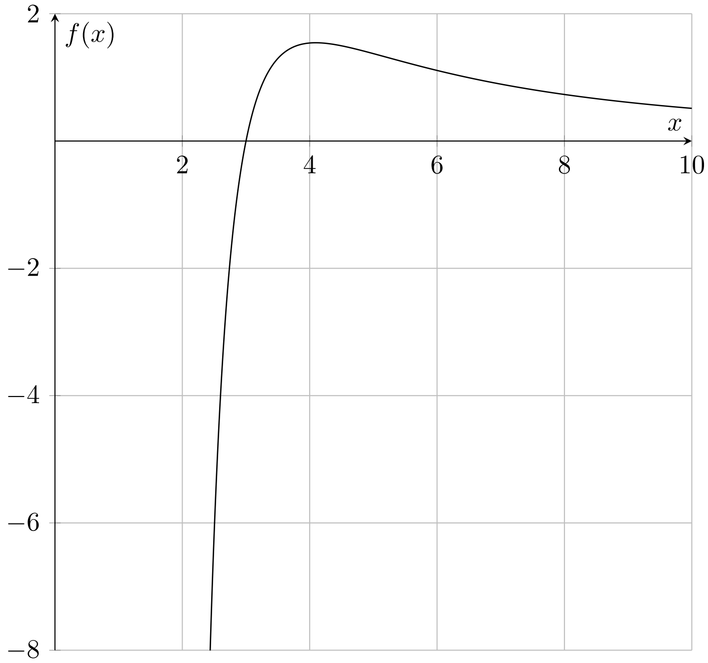
Esercizio 65. Si risolva la seguente equazione differenziale:

$$f'(t) = 5\,f(t) \qquad f(1) = 1.$$

Esercizi dodicesima settimana

Esercizio 66. (Tommei) Trova una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che sia crescente e che abbia come immagine l'insieme $(-2, 2)$ e tale che $f(1) = 0$.

Esercizio 67. (Tommei) La funzione $f : (2, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ha il seguente grafico



Di quale delle seguenti funzioni potrebbe essere il grafico?

$$a(x) = 20\log(x-2) \qquad b(x) = 20\log(2-x) \qquad c(x) = 20\frac{\log(x-2)}{(x-1)^2} \qquad d(x) = 20\frac{\log(x-2)}{x-4}$$

Esercizio 68. Si risolva l'equazione differenziale

$$y'(t) = 1 + y(t) \qquad e \qquad y(1) = 1.$$

Esercizio 69. Una sostanza radioattiva durante il suo processo di decadimento ogni 24 ore dimezza la sua massa. Di quanto cala la massa di tale sostanza in 1 ora?

Sapendo che all'istante $t = 1giorno$ la sua massa è $100libre$, determina l'espressione $m(t)$ che determina la sua massa espressa in grammi in funzione del tempo t espresso in secondi. [non verranno dei numeri tanto belli]

Esercizio 70. La numerosità $y(t)$ di una popolazione di batteri al tempo t espresso in secondi evolve secondo la legge

$$y'(t) = y(t) - y(t)^2$$

Sapendo che $y(0) = 2$ si determini:

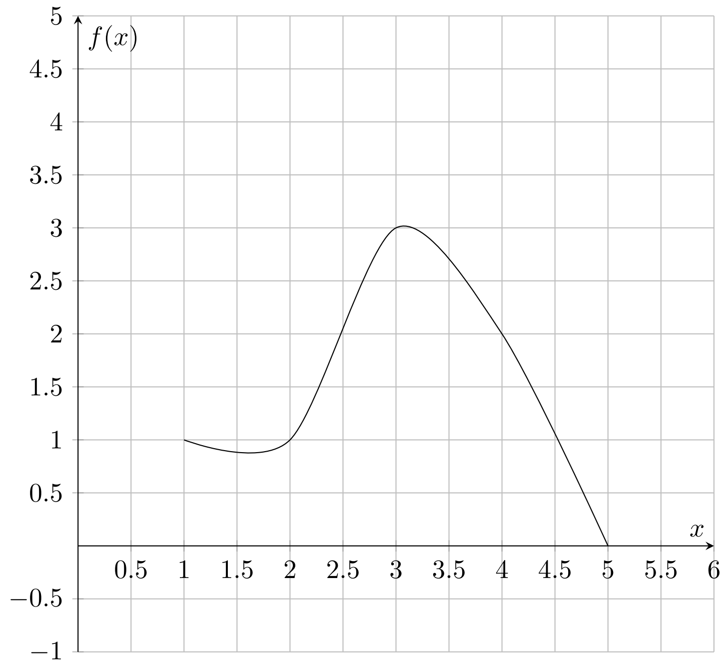
a) l'espressione di $y(t)$.
b) il limite di $y(t)$ per t che tende a infinito e si stabilisca se la funzione è crescente o decrescente.

Esercizio 71. Si risolva l'equazione differenziale

$$y'(t) = 1 + y(t)^2 \qquad e \qquad y(1) = 1.$$

Esercizi tredicesima settimana

Esercizio 72. la funzione $f : [1, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ ha il grafico riportato in figura.

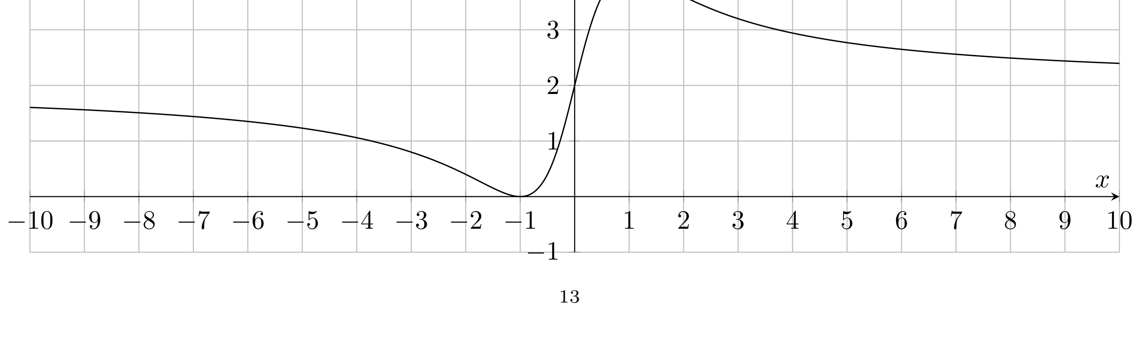


(1) Si risolva l'equazione $f(x) = 2$,
(2) Si determini l'equazione della retta tangente nel punto del grafico di ascissa $x = 2$,
(3) Si determinino i punti di massimo e minimo della funzione f,
(4) Si tracci un grafico approssimativo della derivata di f,
(5) Si consideri la funzione $g : [-4, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(1 - x) + 1$. Si tracci un grafico di g il più accurato possibile.

Esercizio 73. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita da una delle seguenti possibili formule

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f(x) = ax + b \qquad f(x) = \frac{a\,x}{x^2 + 1} + b \qquad f(x) = ab^x + c$$

Il grafico della funzione è riportato in figura. Determinare f.



Esercizio 74. Per quali valori del numero a la funzione $f(x) = ax - \cos(x)$.ha punti di massimo e minimo relativo?

Esercizio 75. Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y'(t) = te^{t^2} \qquad y(1) = 2.$$

Esercizio 76. Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y'(t) = t\,y(t) \qquad y(0) = 1.$$

Esercizi sedicesima settimana

Esercizio 77. Si lancia una moneta truccata 5 volte. La probabilita‘ di ottenere testa in un singolo lancio della moneta è 1/3.

(1) Qual è la probabilità di ottenere 5 volte testa?
(2) Qual è la probabilità di non ottenere mai testa?
(3) Qual è la probabilità di ottenere almeno una volta testa?
(4) Qual è la probabilità di ottenere esattamente 3 volte testa?

Esercizio 78. Lancio un dado non truccato 5 volte.

(1) Qual è la probabilità che il numero 2 esca esattamente 3 volte?
(2) Qual è la probabilità che esca due volte il 3 e tre volte il 2?
(3) Qual è la probabilità che esca due volte il numero 3, due volte il numero 2 e 1 volta uno dei rimanenti quattro numeri.

Esercizio 79. Si è giocato 5 numeri al lotto. Si ricorda che nel gioco dell'otto vengono estratti 5 numeri.

(1) Qual è la probabilità di aver indovinato almeno un numero?
(2) Qual è la probabilità di aver indovinato esattamente un numero?
(3) Qual è la probabilità di aver fatto cinquina?

Esercizio 80. Si è giocato 5 numeri al lotto. Si ricorda che nel gioco dell'otto vengono estratti 5 numeri.

(1) Qual è la probabilità di aver indovinato esattamente due numeri?
(2) Qual è la probabilità di aver indovinato almeno due numeri?
(3) Qual è la probabilità di aver fatto quaterna (ma non cinquina)?

Esercizio 81. Una popolazione è composta per un terzo da persone bionde e per 2 terzi da persone brune. Sappiamo inoltre che 1/3 dei biondi gioca a calcio e 1/2 dei bruni gioca a calcio. Sappiamo inoltre che 1/2 dei biondi gioca a pallavolo e che un 1/3 della popolazione totale gioca a pallavolo

(1) Qual è la probabilità che una persona presa a caso giochi a calcio?
(2) Se si prende una persona a caso qual è la probabilità che sia bionda sapendo già che gioca a calcio?
(3) Qual è la probabilità che una persona bruna giochi a pallavolo?

I compitino del 2019.

Esercizio 82 (I compitino 2019 esr 1)**.** La numerosità di una cultura di batteri cresce lentamente nel tempo è data approssimativamente al variare del tempo t dalla seguente formula:

$$N(t) = N_0 + 10t + 2t^2$$

(1) Sapendo che dopo due ore i batteri sono 1028 trova la numerosità iniziale N_0.
(2) Trova dopo quanto tempo la numeosità è raddoppiata.

Esercizio 83 (I compitino 2019 esr 2)**.** Sia data la funzione $f(x) = x - \sin(2x)$ Trova gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente e eventuali massimi e minimi locali.

La funzione ha massimi e minimi?

Esercizio 84 (I compitino 2019 esr 3)**.** Calcola l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle ascisse, dalle rette $x = 2$ e $x = 1$ e dalla curva di equazione $y = (3x - 2)^{-1/3}$.

Esercizio 85 (I compitino 2019 esr 3)**.** Supponi che la concentrazione di batteri $c(t)$ in un liquido si al tempo t soddisfi la seguente equazione:

$$c'(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t}$$

(1) Risolvi l'equazione nell'ipotesi che alla lunga non rimangano batteri nell'acqua.
(2) Disegna il grafico di $c(t)$
(3) Quanto tempo occorrerà affinché la concentrazione raggiunga un quarto del suo valore iniziale?

Esercizio 86 (I compitino 2019 esr 5)**.** Durante un'epidemia il numero di persone infette è approssimato dalla funzione

$$f(t) = 2000\frac{\log(t+1)}{t+1}$$

dove t è il tempo. Determina il segno della funzione, i limiti per t che tende a $\pm\infty$ e gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente. Cerca di disegnarne il grafico.

Esercizio 87 (I compitino 2019 esr 6)**.** Considera la funzione

$$f(x) = (x - 1)e^{2-x}.$$

(1) Determina il segno della funzione, i limiti per t che tende a $\pm\infty$ e a $1^{\pm}$, gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente. Disegnane un grafico.
(2) Per $k \geqslant 1$ sia A_k l'area della regione piana limitata dall'asse delle ascisse, dalle rette $x = 1$ e $x = k$. Calcola A_k.
(3) Calcola il limite di A_k per k che tende a infinito.

I compitino del 2019 recupero.

Esercizio 88 (recupero I compitino 2019 esr 1)**.** La quantità $c(t)$ di un farmaco, espressa in milligrammi, nel sangue al variare del tempo t (espresso in ore) è data approssimativamente da

$$c(t) = c_0 3^{-2t}.$$

a) Sapendo che dopo due ore la quantità di farmaco è 2 milligrammi, trovare la quantità iniziale c_0.
b) Trova dopo quanto tempo la quantità iniziale è dimezzata.

Esercizio 89 (recupero I compitino 2019 esr 2)**.** Trova un'espressione analitica di una funzione $f : (-3, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ che sia monotona decrescente e il cui grafico passi per il punto di coordinate $(1, -5)$.

Esercizio 90 (recupero I compitino 2019 esr 3)**.** Trova l'area sottesa al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\log(2x)}{x}$$

nell'intervallo $[e, e^2]$.

Esercizio 91 (recupero I compitino 2019 esr 4)**.** La quantità di luce artificiale $I(t)$ che una pianta riceve in una serra soddisfa la seguente equazione differenziale:

$$\frac{\tan(t+1)}{2}\frac{dI}{dt} - I = 0$$

(1) Trova l'integrale generale dell'equazione differenziale

(2) Trova la soluzione particolare tale che $I(1) = 3\sin(2)^2$.
(3) Determina i punti di massimo e minimo della funzioen trovata al punto precedente.

Esercizio 92 (recupero I compitino 2019 esr 5)**.** Sia data la funzione

$$f(x) = x^2 e^x$$

a) Determina gli intervalli nei quali la funzione è crescente o decrescente e eventuali punti di minimo e massimo locali.
b) Trova il massimo della funzione nell'intervallo $[-6, 1]$

Esercizio 93 (recupero I compitino 2019 esr 6)**.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{6 - e^{-x}}{e^x}$$

Determina il segno, eventuali punti di massimo e minimo locali e assoluti, limiti per x che tende a $\pm\infty$. Disegnane un grafico.

I compitino del 2020.

Esercizio 94. Trova una funzione $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(1) = 2$ e avente un minimo per $x = e$.

Esercizio 95. Calcola l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = 2x + \log(x^2 + 3)$ nel punto di ascissa 1.

Esercizio 96. Calcola l'area della regione di piano racchiusa dalle curve di equazione $y = x^4 - 3$ e $y = -x^4 + 5$.

Esercizio 97. La numerosità $n(t)$ di una coltura di batteri in un liquido evolve secondo la seguente equazione differenziale

$$\frac{dn}{dt} = 2 \cdot 10^{-5} n(t)(5 \cdot 10^5 - n(t)) \qquad \textit{per} \quad t \geqslant 0.$$

a) Risolvi l'equazione differenziale sapendo che $n(0) = 10^4$.
b) Determina il segno e i punti di massimo e minimo della funzione n e disegnane un grafico approssimativo.
c) Quanto tempo occorrerà affinché il numero di batteri diventi la metà del valore asintotico?

Esercizio 98. Sia data la funzione $f(x) = -(x + 1)^3 e^x$.

(1) Trova i punti, se esistono, di massimo e minimo e di massimo e minimo relativo
(2) Trova il massimo e il minimo assoluto della funzione nell'intervallo $[-5, 3]$.

Esercizio 99. Sia data la funzione $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 + x\log(x)$.

a) Si studi la funzione f disegnandone un grafico. [Anche questa espressione non l'abbiamo mai usata. Studiare la funzione non ha un significato univoco, vuol dire più o meno raccogliere tutte le informazioni sulla funzione che ne permettano di disegnare un grafico che metta in evidenza le caratteristiche salienti della funzione. Nel nostro caso, per esempio, il segno della funzione, i limiti per x che tene a zero o a infinito, i massimi e i minimi relativi, ed eventualmente assoluti, più il calcolo di qualche valore della funzione]
b) Determina, al variare di k il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

I Compitino del 2021.

Esercizio 100 (Esercizio 1 del I compitino del 2021)**.** Trova il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2 - x}{x^2 - 9}\right)$$

[Questo e' un tipo di esercizio che noi non abbiamo mai fatto. Trovare il campo di esistenza vuol dire questo. L'espressione che definisce f per alcuni valori di x, per esempio per $x = 3$ non si può calcolare perchè si divide per 0. La domanda vuol dire questo: per quali valori di x l'espressione ha senso?]

Esercizio 101 (Esercizio 2 del I compitino del 2021)**.** Considera la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 6x.$$

Stabilisci se la funzione ha massimo e minimo e se ha punti di massimo e minimo relativo.

Esercizio 102 (Esercizio 3 del I compitino del 2021)**.** Calcolare l'aerea sottesa al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$

nell'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 103 (Esercizio 4 del I compitino del 2021)**.** La quantità $q(t)$ di un farmaco nel sangue evolve nel tempo t secondo l'equazione

$$\frac{dq}{dt} = -7q.$$

Sapendo che al tempo $t = 0$ vengono somministrati 20 milligrammi di farmaco, trova l'espressione di $q(t)$. Calcola poi il tempo necessario affinché nel sangue sia presenta la metà della quantità di farmaco iniziale.

Esercizio 104 (Esercizio 5 del I compitino del 2021)**.** Sia $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x^2 \log(x)$$

Determina i limiti per x che tende agli estremi dell'intervallo di definizione, eventuali massimi e minimi e eventuali massimi e minimi locali.

I compitino del 2020, recupero.

Esercizio 105. Trova la primitiva $F(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{2\log(x)}{x} + 1$$

tale che $F(1) = 3$.

Esercizio 106. Trova l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2-2x}{x^2-1}}$$

[Questo e' un tipo di esercizio che noi non abbiamo mai fatto. Trovare il campo di esistenza o di definizione vuol dire questo: l'espressione che definisce f per alcuni valori di x, per esempio per $x = 3$ non si può calcolare perchè si divide per 0. La domanda ha il seguente significato: per quali valori di x l'espressione ha senso?]

Esercizio 107. Sia data la funzione $f(x) = 3x + e^{x^2+1}$. Trova l'equazione della retta passante per il punto $(1, 1)$ e perpendicolare alla retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto di ascissa 0. [Noi non abbiamo mai parlato di rette perpendicolari ad una retta, se non le avete fatte alle superiori, ricavate l'equazione della rettta tangente tangente al grafico nel punto di ascissa 0 e basta]

Esercizio 108. Il numero $N(t)$ di una coltura di batteri al tempo t risolve l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}N(t) = 4(10^9 - N(t)) \qquad per \quad t \geqslant 0.$$

a) Calcola l'espressione di $N(t)$ sapendo che al tempo iniziale il numero di batteri è 10^6.
b) Per un tempo molto grande come si comportano i batteri? Ovvero studia la funzione per t che tende a $+\infty$
c) Quanto tempo occorrerà affinchz'e il numero di batteri diventi 100 volte il valore iniziale?

Esercizio 109. Sia data la funzione $f(x) = x - 2\sin(x)$.

a Trova i punti di massimo e minimo relativo di tale funzione
b Trova il massimo e minimo assoluto della funzione nell'intervallo $[0, \pi]$

Esercizio 110. Considera la funzione f definita dall'espressione

$$f(x) = \frac{x^2}{\log(x)} + 1$$

a Si studi la funzione f disegnandone un grafico. [Anche questa espressione non l'abbiamo mai usata. Studiare la funzione non ha un significato univoco, vuol dire più o meno raccogliere tutte le informazioni sulla funzione che ne permettano di disegnare un grafico che metta in evidenza le caratteristiche salienti della funzione. Nel nostro caso, per esempio, quando l'espressione ha senso, il segno della funzione, i limiti per x che tene a zero, 1 o a infinito, i massimi e i minimi relativi, ed eventualmente assoluti, più il calcolo di qualche valore della funzione]
b Al variare del parametro k determina il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$