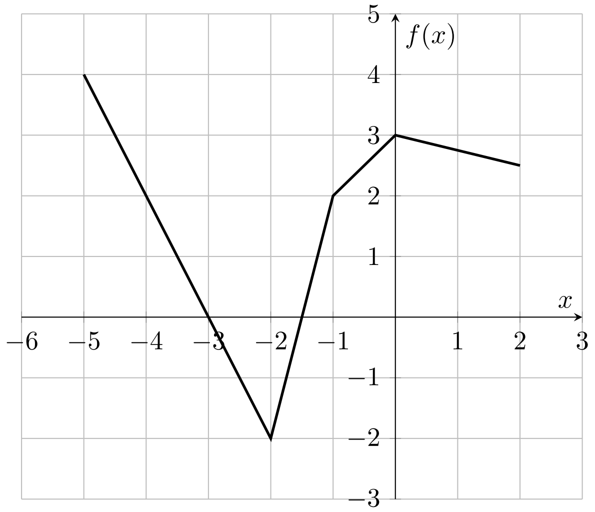
Compito del 20 giugno 2022

Avete 3 ore di tempo a disposizione. Motivate le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1. La funzione $f : [-5, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ ha il seguente grafico:



Sia $g : [-6, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \frac{1}{2} f(x + 1)$:

a) Si risolva la disequazione $f(x) \leqslant 2$;
b) Si disegni un grafico accurato della funzione $g(x)$;
c) Si determinino i punti di massimo e minimo della funzione f.

Esercizio 2. In un laboratorio viene studiata la forza di un piccolo animale al variare con l'età. Da una parte la forza di un muscolo aumenta con l'aumentare delle dimensioni e dall'altra diminuisce con l'invecchiamento. I ricercatori hanno fatto due modelli approssimativi ipotizzando che l'andamento potrebbe essere del tipo espresso dalle funzioni f e g, dove $f, g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sono le funzioni

$$f(x) = (1 + 2x)e^{-x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 8 + 2x^4 - 4x^2$$

a) Si determini in quali intervalli le funzioni f e g sono crescenti e in quali decrescenti.
b) Si dica quali delle due funzioni secondo voi vi sembra più ragionevole rappresenti il fenomeno studiato. (si motivi la risposta).
c) Per la funzione scelta si determini a quale età l'animale raggiunge la forza massima.

Esercizio 3. Si calcoli l'area della regione di piano compresa tra l'asse delle x, le rette $x = -1$ e $x = 1$ e la funzione $f(x) = xe^x$. [Si consiglia di fare un disegno molto approssimativo della funzione f prima di risolvere il problema]

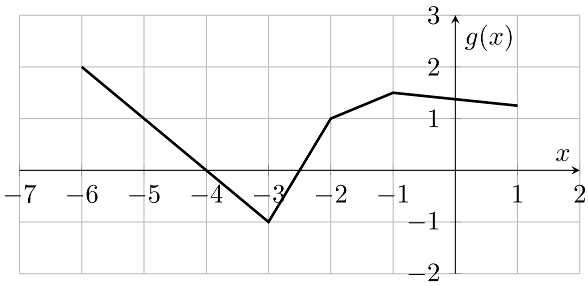
Esercizio 4. Un gruppo di pazienti sono affetti dallo stesso piccolo disturbo. Al 60% di questi viene dato un farmaco che si stima faccia effetto 2 volte su 3, ai rimanenti viene dato un placebo e si stima che il placebo faccia effetto una volta su 5.

a) Qual è la probabilità che ad un paziente preso a caso sia stato dato il placebo e, contemporaneamente, sia guarito?
b) Qual è la probabilità che un paziente preso a caso risulti guarito dal disturbo?
c) Qual è la probabilità che scelto a caso un paziente tra quelli guariti, questo abbia preso il placebo?

Esercizio 5. In Texas, a una mandria di molte migliaia di buoi è stato somministrato cibo ad alto contenuto proteico per un mese. Un campione di 49 buoi è stato pesato e la media aritmetica del peso guadagnato è di 6,7 libbre. Assumiamo che la deviazione standard nella mandria per il cambiamento di peso sia di 7 libbre. Si testi l'ipotesi che il peso medio guadagnato sia di 5 libbre, con affidabilità 5% e 10%.

Soluzioni del compito del 14 giugno

Esercizio 1. Sia $g : [-6, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \frac{1}{2} f(x + 1)$:
a) La disequazione $f(x) \leqslant 2$ è verificata per $x \in [-4, -1]$.
b)



c) $x = -5$ è un punto di massimo e $x = -2$ è un punto di minimo.

Esercizio 2. Consideriamo la funzione f. La derivata della funzione f è uguale a $(1 - 2x)e^{-x}$ in particolare è positiva tra 0 e 1/2 e negativa per $x > 1/2$. Quindi la funzione tra 0 e 1/2 cresce, in 1/2 raggiunge il suo massimo e per $x > 1/2$ decresce. (non ho detto cosa succede per $x < 0$ perché la funzione è, per ipotesi, definita solo per $x \geqslant 0$).

Consideriamo la funzione g. La derivata della funzione g è uguale a $8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1)$. In particolare è negativa tra 0 e 1 e positiva per $x > 1$. Quindi la funzione tra 0 e 1 decresce, in 1 raggiunge il suo minimo e per $x > 1$ cresce. Questa funzione sembra quindi avere una descrizione non compatibile con il problema, quando l'animale è giovane la sua forza diminuisce e quando invece è vecchio aumenta.

La funzione cercata è quindi la f. In particolare l'animale per $x = 1/2$ raggiunge la sua forza massima.

Esercizio 3. Osserviamo che la funzione f è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$ quindi l'area cercata è uguale a

$$A = -\int_{-1}^{0} x\, e^x \, dx + \int_0^1 x\, e^x \, dx$$

Precedendo per parti otteniamo

$$A = -[x\, e^x]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^x \, dx + [x\, e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = -[x\, e^x]_{-1}^0 + [e^x]_{-1}^0 + [x\, e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

e infine otteniamo

$$A = -(0 + e^{-1}) + 1 - e^{-1} + e - 0 - (e - 1) = 2 - 2e^{-1}$$

Esercizio 4. a) La probabilità cercata è il prodotto della probabilità che al paziente sia stato il placebo (cioè 0.4) per la probabilità che a un paziente a cui sia stato dato il placebo sia guarito (cioè $1/5 = 0.2$). Quindi la probabilità cercata è $0,4 \times 0,2 = 0,08$.

b) La probabilità cercata è la somma della probabilità calcolata in a con la probabilità che ad un paziente venga dato il farmaco e nello stesso guarisca che si calcola analogamente ed è quindi uguale a $0,6 \times 2/3 = 0,4$). Quindi la probabilità cercata è $0,4 + 0,08 = 0,48$.

d) Noi siamo interessati a calcolare la probabilità di aver preso un placebo (evento A) essendo un paziente guarito (evento B). Ovvero $P(A|B)$. Sappiamo che $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$. La probabilità $P(A \cap B)$ l'abbiamo calcolata nel punto A ed è uguale a $0,08$. La probabilità B l'abbiamo calcolata nel punto b) ed è uguale a $0,48$, quindi la probabilità cercata è uguale a $0,08/0,48 = 1/6$ cioe' circa $0,167$.

Esercizio 5. Conosciamo la media aritmetica degli esiti $x_1, \ldots, x_{49}$ di un campione di $N = 49$ variabili Gaussiane $N(m, \sigma^2)$, ovvero

$$\frac{x_1 + \cdots + x_49}{49} = 6,7.$$

Assumiamo di sapere che $\sigma = 7$ e vogliamo testare l'ipotesi nulla $H_0)m = 5$. La quantità pivot è dunque

$$P = \frac{(x_1 - m) + \cdots + (x_N - m)}{\sigma\sqrt{N}} = \sqrt{N}\frac{\frac{x_1 + \cdots + x_N}{N} - n}{\sigma} = \sqrt{49} \cdot \frac{6,7 - 5}{7} = 1,7.$$

Confrontiamo la quantità pivot con l'intervallo di fiducia relativo ai due valori di affidabilità $\alpha = 0,05$ e $0,1$. Dato α, cerchiamo il valore soglia t^* per cui una Gaussiana standard cade nell'intervallo $[-t^*, t^*]$ con probabilità $1 - \alpha$. Per quanto visto in classe questo equivale a risolvere

$$\Phi(t^*) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

per cui dalla tavola della Gaussiana si ricava che: per $\alpha = 0,05$ vale $t^* \simeq 1,96$ e per $\alpha = 0,1$ vale invece $t^* \simeq 1,65$. Dunque se $\alpha = 0,05$ vale $P \in [-t^*, t^*]$ e accetteremo l'ipotesi nulla, mentre se $\alpha = 0,1$ invece $P \notin [-t^*, t^*]$ e dunque rifiutiamo l'ipotesi nulla.