Dimostrazione elementare del teorema di Brouwer

(F.Lazzeri; Pisa, ottobre 1998)

Il *diametro* di un sottoinsieme$A$ di uno spazio metrico X è l'estremo superiore dell'insieme $\{d(x,y) \ : \ x,y \in A\}$ e sarà indicato con $diam(A)$. Se $f : X \to Y$ è una applicazione tra spazi metrici ed $x_0 \in X$, l'estremo inferiore dell'insieme $\{diam(f(B(x_0,r))) \ : \ r \in \mathbb{R}^+\}$ sarà indicato con $\sigma(f;x_0)$ e detto *modulo di discontinuità* di f in x_0 : evidentemente σ si annulla precisamente nei punti di X nei quali f è continua. L'estremo superiore $\sigma(f)$ dei $\sigma(f;x)$ per $x \in X$ sarà detto *modulo di discontinuità* di f.

Siano D il disco chiuso di raggio uno e centro zero in $\mathbb{R}^n$ ed S la sua frontiera.

Teorema 1 *Ogni applicazione $r : D \to S$ che fissi i punti di S ha modulo di discontinuità almeno $\rho_n = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}$. In particolare nessuna tale r può essere continua*

Nella dimostrazione sarà utilizzata soltanto la seguente proprietà di ρ_n :

Lemma 2 *Sia $A \subset S$ un sottoinsieme tale che $0 \in \hat{A}$. Allora $diam(A) \geq \rho_n$*

E' chiaro che un tale ρ_n debba esistere; è anche facile verificare che ne esiste qualcuno maggiore di uno. Una dimostrazione che $\rho_n = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}$ è la migliore costante che verifica il lemma e per la quale vale il teorema sarà indicata più avanti.

Il teorema viene dimostrato con tecniche "simpliciali" che ora descriveremo brevemente. E' facile dimostrare che due qualsiasi compatti convessi in $\mathbb{R}^n$ aventi parte interna non vuota sono riferiti da un omeomorfismo che conserva la parte interna. Quindi se non si è interessati alla costante ρ_n , si può sostituire D con il cubo $[0,1]^n$ o con il simpleso standard che qui di seguito definiamo ed in tal modo la dimostrazione può risultarne un pò semplificata; essa rimane comunque valida anche nel caso di D fornendo la costante precisata prima come infine mostreremo.

Poliedri. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. L'inviluppo convesso $\hat{\Delta}$ di un sottoinsieme finito $\Delta \subset V$ è detto un *poliedro convesso* in V; se Δ è costituito da $(p+1)$ vettori affinemente indipendenti, $\hat{\Delta}$ viene detto un *$p-$simplesso.* Si dimostra che se Δ , Γ sono sistemi affinemente indipendenti in V e $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ allora $\Delta = \Gamma$; in altre parole un $p-$simplesso determina univocamente i suoi *vertici.* Si dice che un simplesso $\hat{\Delta}$ è una *faccia* di un simplesso $\hat{\Gamma}$ se $\Delta \subset \Gamma$. Una *triangolazione* di un sottoinsieme $Q \subset V$ è una famiglia finita $\mathcal{K}$ di simplessi di V tale che:
- Q è l'unione degli elementi di $\mathcal{K}$
- ogni faccia di un elemento di $\mathcal{K}$ stà in $\mathcal{K}$
- l'intersezione di due simplessi di $\mathcal{K}$ è un simplesso che è faccia di entrambi

L'insieme Q *supporto* di una triangolazione viene detto un *poliedro* di V. Si può dimostrare (senza troppe difficoltà) che un poliedro convesso è un poliedro, ossia che è supporto di qualche triangolazione.
Il $p-$*simplesso standard* S_p è definito come l'inviluppo convesso della base canonica di $\mathbb{R}^{p+1}$; la sua frontiera ∂S_p è il poliedro triangolato da tutte le facce proprie di S_p.
Suddivisione baricentrica. Sia fissato su V un prodotto scalare definito positivo. Chiameremo *diametro* di una triangolazione di un poliedro di V il massimo dei diametri dei simplessi che la costituiscono. Descriviamo ora una costruzione che ad ogni triangolazione $\mathcal{K}$ di un poliedro Q associa un'altra triangolazione $\mathcal{K}^{(1)}$ di Q detta sua *suddivisione baricentrica* e avente diametro più piccolo in un modo che iterando la procedura si ottengono triangolazioni , $\mathcal{K}^{(1)}$, $\mathcal{K}^{(2)}$,... di Q i cui diametri tendono a zero. Si procede nel modo che segue.
Se s è un $p-$simplesso chiamiamo suo *baricentro* la media $B(s) = \frac{1}{p+1}\sum_{x\in s} x$.
La triangolazione $\mathcal{K}^{(1)}$ è allora costruita così : per ogni successione strettamente crescente $s_0 \subset s_1 \subset .. \subset s_p$ di simplessi di $\mathcal{K}$, si prende il $p-$simplesso di vertici $B(s_0), \dots, B(s_p)$. Che tali simplessi costituiscano una triangolazione del supporto di $\mathcal{K}$ si dimostra con facili considerazioni di algebra lineare.
Vediamo ora quanto rimpicciolisce il diametro della triangolazione passando alla suddivisione baricentrica. Basterà comparare il diametro di un simplesso con quello dei suoi suddivisi. Sia dunque $\Delta = \{x_1, \dots, x_r\}$ l'insieme dei vertici di un simplesso s di $\mathcal{K}$.

Lemma 3 *Per $y \in V$ ed $x \in \hat{\Delta}$ si ha:*

$$||y - x|| \leq sup_{i=1,\dots,r}||y - x_i||$$

Dim. Se $x = \sum_1^r \lambda_i x_i$ si ha:

$$||y-x|| = ||(\sum_1^r \lambda_i)y - \sum_1^r \lambda_i x_i|| = ||\sum_1^r \lambda_i(y-x_i)|| \leq \sum_1^r \lambda_i||y-x_i|| \leq sup_{i=1,\dots,r}||y-x_i||$$

Corollario 4 $diam(\Delta) = diam(\hat{\Delta})$

Corollario 5 *Per $y \in \hat{\Delta}$ si ha $||y - B(s)|| \leq \frac{r-1}{r} diam(s)$. Ne segue che se $\mathcal{K}$ è una triangolazione di un poliedro Q fatta con simplessi di dimensione al più n allora $diam(\mathcal{K}^{(1)}) \leq \frac{n}{n+1}\, diam(\mathcal{K})$. Conseguentemente $lim_{i\to\infty} diam(\mathcal{K}^{(i)}) = 0$*

Dimostrazione del teorema
Esaminiamo dapprima il caso del $n-$simplesso standard, supponendo che ρ_n sia una costante positiva tale che ogni $A \subset \partial S_n$ il cui inviluppo convesso contiene il baricentro B_n di S_n abbia necessariamente diametro almeno ρ_n.
Se $r : S_n \to \partial S_n$ è una applicazione avente modulo di discontinuità inferiore a ρ_n e tale che $r(x) = x$ per ogni $x \in \partial S_n$, si scelga una triangolazione $\mathcal{K}$ di S_n per la quale $diam(r(s)) < \rho_n$ per ogni $s \in \mathcal{K}$ (essendo S_n compatto, basterà iterare un numero sufficiente di volte la suddivisione baricentrica).
Costruiamo allora una applicazione $R : S_n \to \partial S_n$ definendola su ogni simplesso $s \in \mathcal{K}$ come la composizione tra la (unica) applicazione affine di s in $\mathbb{R}^{n+1}$ che nei vertici di s coincide con r e la proiezione radiale dal baricentro di S_n in ∂S_n. E' chiaro da quanto visto sopra che tale applicazione risulta ben definita.

Per mostrare che una tale applicazione non può esistere, si ragiona così : ∂S_n non può essere contenuto nell'unione di un numero finito di sottospazi affini di dimensione inferiore ad $n-1$. Togliamo allora a ∂S_n tutte le immagini per R di simplessi in $\mathcal{K}$ che sono contenute in qualche sottospazio affine di dimensione inferiore ad $n-1$ e sia $x \in \partial S_n$ uno dei sopravvissuti. L'insieme $\Gamma = R^{-1}(x)$ è allora un poligono (unione delle sue intersezioni con i simplessi di $\mathcal{K}$ aventi dimensione n) che ha un solo punto di bordo, precisamente x. Infatti per ogni $n-$simplesso s della triangolazione, $\Gamma \cap s$ è per costruzione l'intersezione di s con una retta che incontra ∂s in due soli punti e quindi Γ non può avere punti di bordo all'interno del simplesso standard dal quale siamo partiti. Ciò è manifestamente assurdo e la dimostrazione è conclusa.

Nel caso del disco D la dimostrazione può essere svolta così : si parte da un poliedro convesso Q "isritto" in D prendendo l'inviluppo convesso di un sottoinsieme abbastanza fitto in ∂D, lo si triangola e si itera un processo di suddivisioni baricentriche "relative" scegliendo solo successioni strettamente crescenti $s_0 \subset s_1 \subset .. \subset s_p$ di simplessi in cui s_p non è contenuto in ∂Q. In tal modo si arriva ad una triangolazione di Q di diametro sufficientemente piccolo di modo che possa essere definita una $R : Q \to \partial D$ come sopra. Se si vuole si può estendere tale R a tutto D con la proiezione radiale dal centro di D. In ogni caso considerando la fibra di R sopra un punto "generico" di ∂D si costruisce una poligonale (finita) con un solo punto di bordo arrivando così ad un assurdo.

Che la migliore costante per il disco D di dimensione n sia $\rho_n = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}$ si dimostra elementarmente così :
sia 0 contenuto nell'inviluppo convesso di un sottoinsieme $A \subset \partial D$; allora esso è contenuto in un $n-$simplesso s con vertici in A. Se 0 è contenuto nel bordo di s, quindi in qualche sua faccia propria, per ipotesi di induzione su n il diametro di tale faccia, e quindi anche quello di A, è almeno $\rho_{n-1} > \rho_n$ ed il lemma è dimostrato. Basterà allora mostrare che per ogni $n-$simplesso con vertici in A, che contiene 0 all'interno e che non è equilatero, ne esiste un altro con le stesse proprietà ma con diametro minore. Ciò si fa considerando la faccia del simplesso costituita dai lati di dimensione massima, e sostituendoli con quelli di una faccia parallela e un pò più vicina al centro di D.