Introduzione

Salvo esplicito avviso contrario, ogni spazio topologico sarà supposto essere di Hausdorff ed a base numerabile. Grosso modo possiamo distinguere gli spazi topologici che esamineremo in tre tipi:
primo tipo: spazi topologici che descrivono oggetti geometrici il cui esame è il fine principale che ci proponiamo. Questi sono spazi realizzabili come sottoinsiemi chiusi di qualche $\mathbb{R}^N$ (in particolare sono di dimensione finita: vedi definizioni nel seguito) ed hanno buone propietà locali (ad esempio sono localmente contrattili). Una classe ampia di tali spazi è data dai poliedri. Una classe praticamente esaustiva dei casi di interesse geometrico, è data dagli spazi elementari di cui daremo la definizione (la trattazione di essi fornita in appendice è comunque fuori programma) .
secondo tipo: spazi ottenuti topologizzando insiemi di applicazioni continue tra spazi del primo tipo. Questi non sono più generalmente di dimensione finita né localmente compatti. Nel seguito definiremo alcuni di questi spazi di applicazioni ma ne faremo un uso molto limitato; essi, o loro analoghi, sono invece importanti in molte questioni di analisi non lineare.
terzo tipo: spazi che potremmo definire "virtuali" , ottenuti con costruzioni astratte, poco intuitive, spesso come limite di una successione di spazi più "concreti". In genere essi sono soluzione di qualche problema "universale" e come tali basta sapere che esistono spazi che verificano date propietà; quasi mai occorre sapere come effettivamente sono costruiti né si lavora esplicitamente su essi ma solo su spazi ordinari di cui essi sono limite. La loro introduzione serve di solito per poter dare enunciati di teoremi generali in forma semplificata, anche se spesso ciò causa perdita di informazione. Anche queste topologie, come quelle del secondo tipo, non saranno l'oggetto principale del nostro studio. Saranno introdotte per i poliedri associati a schemi simpliciali e CW complessi non localmente finiti e nei cenni che faremo sugli spazi classificanti.

Definizioni e risultati particolari di topologia generale di cui avremo bisogno, saranno trattati in appendice se non studiati in precedenti corsi.

Dopo un paragrafo di commento, in cui diamo tra l'altro una dimostrazione "elementare" del teorema del punto fisso di Brouwer (ossia senza utilizzo dalla teoria che sarà svolta in seguito), la prima parte del corso sarà di tipo combinatorio, essenzialmente indipendente da nozioni topologiche. Dopo aver introdotto gli schemi simpliciali e discusso brevemente come siano collegati agli spazi topologici, prima dell'introduzione degli invarianti algebrici, daremo la classificazione combinatoria delle superficie. Introdurremo quindi il gruppo fondamentale formale di uno schema simpliciale ed il suo uso nella teoria dei rivestimenti, il teorema di van Kampen ed alcune applicazioni alla teoria dei gruppi. Introdurremo poi in tale contesto combinatorio, gli invarianti omologici ed i loro "duali", quelli coomologici. Nel fare ciò dovremo dimostrare alcuni teoremi di algebra (lineare o più propiamente di algebra omologica) che una volta stabiliti permetteranno di trattare velocemente le teorie analoghe per spazi topologici. Infine accenneremo a come si possano introdurre i gruppi di omotopia di dimensione superiore nella teoria degli schemi simpliciali.

Nella seconda parte introdurremo gli invarianti per spazi topologici: gruppo fondamentale, rivestimenti, teoremi di monodromia e di van Kampen; poi omologia e coomologia singolari e loro confronto con quelle simpliciali.

Nella terza parte definiremo i gruppi di omotopia di dimensione superiore e la struttura dei CW complessi, con procedimenti di calcolo applicati ad alcuni casi specifici.

Nella parte finale, parleremo di fibrati, classi caratteristiche e spazi classificanti. Questa parte sarà quasi integralmente facoltativa e sarà probabilmente svolta in lezioni supplettive alla fine del corso.

Testi consigliati. Le dispense che verranno poste in rete dovrebbero essere sufficienti per comprendere il corso e preparare l'esame relativo. Indicherò comunque qualche testo classico, anzitutto perché è sempre bene vedere le cose da più punti di vista; ma soprattutto perché imparare a conoscere un buon testo completo, cioè aver visto il linguaggio che adopra e dato uno sguardo agli argomenti che tratta, permetterà in futuro, di andare a consultarlo più facilmente per trovare ad esempio risultati non trattati nel corso (che saranno molti) o verificare se essi valgono, ed in che forma, anche in situazioni più complicate di quelle in cui ci metteremo qui.
Un ottimo testo è lo Spanier "Algebraic Topology" ; direi che è da considerare più un testo per referenze che per lo studio perché troppo vasto e definitivo per essere letto tutto di seguito.
Un buon testo, introduttivo e perciò più adatto allo studio è il Greenberg "Lectures on Algebraic Topology" . Attenzione perché contiene alcune dimostrazioni errate, non tutte corrette nelle edizioni più recenti; rimane comunque un testo che mi piace (forse perché ci ho studiato da giovane).
Un altro testo più completo del precedente (lo conosco meno ma che mi sempra il più vicino al modo in cui tratterò l'argomento) è il Maunder "Algebraic Topology".
Infine uno splendido testo, pieno di idee geometriche e molto stimolante specialmente dal punto di vista combinatorio, è il Seifert-Threlfall "Lehrbuch der Topologie" (è del 1934 , ma non sembra) che è stato tradotto alcuni anni fa in inglese ed è ora più facilmente leggibile.

Metodi combinatori

Un commento preliminare

Il prossimo paragrafo ha, come scopo principale, quello di motivare le costruzioni astratte che verranno svolte nel seguito. Ma ha anche il seguente intento critico. Le teorie matematiche soffrono spesso di "elefantiasi" : nascono per risolvere in modo semplice (quasi sinonimo dell' eleganza) questioni apparse in precedenza, magari nello stesso ambito matematico, o per formalizzare costruzioni astratte mirabili, alla termine di una gestazione sovente svolta incosciamente anche da chi svolge attività diverse da quella matematica; ma trovato un martello che va bene una volta, lo si vuol adoprare a più non posso facendolo anche più grosso, con il risultato che le teorie perdono la loro semplicità (assieme all'eleganza, comunemente intesa) e soprattutto rischiano di divenire un peso non solo inutile ma addirittura dannoso per la comprensione delle cose.
Questo capita, ma solo talvolta (essendo ottimisti, diciamo nel 95% dei casi).

Ma non è così male basta andarci cauti: credo che il compito principale dei matematici sia quello di affinare e tramandare i metodi astratti della loro disciplina, che un certo ruolo ha nel divenire della nostra società ed il modo migliore per esserne all'altezza è tentare continuamente di far fare "progressi", approfondendo idee già rese coscienti o cercando di crearne di nuove; nella stragrande maggioranza dei casi (storicamente e ancor più oggi che l'attività è diventata frenetica) i risultati raggiunti saranno presto dimenticati per svariate ragioni: troppo complicati per essere utilizzati in qualche questione interessante e giudicati solo un insieme di arzigogolate costruzioni che non aggiungono nessuna nuova idea a quanto già conosciuto. Ma il lavoro fatto è intanto confluito in un grande magma all'interno del quale assieme ai processi di eliminazione delle parti inutili, si semplificano quelle ritenute importanti e dove talvolta nascono nuove idee che portano a veri progressi; difficile comunque stabilire a priori cosa è buono e cosa non lo è. Uno dei pericoli della mancanta consapovolezza di questo stato di cose è descritto in modo arguto dalla seguente favola dell'antica cultura cinese che è riportata come motto prima della prefazione nel libro "Differential germs and catastrophes" di Broecker-Lander seguita da un commento del grande matematico R.Thom.

There once lived a man
who learned how to slay dragons
and gave all he possessed
to mastering the art.

After three years
he was fully prepared but,
alas, he found no opportunity
to practise his skills.

(Dschuang Dsi)

As a result he began
to teach hov to slay dragons

(René Thom)

E' interessante al riguardo anche la seguente caustica opinione di un altro grande matematico, S.S.Abhyankar (algebrista indiano), tratta dal suo "Historical rambling in algebraic geometry and related algebra" (Purdue University, Indiana, U.S.A., 1974):

Fundamental thesis of this talk (obviously a partisan claim).
The method of high-school algebra is powerful, beautiful and accessible. During the last fifty years, the other two algebras have been making exaggerated claims; first, college algebra has been bleating groups-rings-fields until they are coming out of your ears; then university algebra started infecting young minds with functorial arrows. Let us not lose sight of the power of the explicit algorithmic processes given to us by Newton, Tschirnhausen, Kronecker and Sylvester.
Later on in the talk I shall relate four personal experiences to substantiate the above thesis.

0. Il teorema del punto fisso di Brouwer.
Siano X un insieme e $\phi : X \to X$ una applicazione; un punto $x \in X$ tale che $\phi(x) = x$ viene detto un *punto fisso* per ϕ.

Discuteremo ora alcuni teoremi di punto fisso; ossia determineremo ipotesi su X e ϕ sotto le quali sia obbligatoria l'esistenza di qualche punto fisso. Saremo anche interessati, quando possibile, a stimare quanti devono essere tali punti.
Esaminiamo alcuni esempi; a livello puramente insiemistico:
Esempio 1. Sia X un insieme finito di cardinalità n e $\phi : X \to X$ una applicazione la cui $q-$esima iterata sia l'identità. Se q è la potenza di un primo ed n è primo con q allora esistono punti fissi per ϕ.
Si può dire qualcosa su quanti debbano essere tali punti fissi? (ad esempio si determinino le coppie (q, n) per cui deve esservi più di un punto fisso).

Risultati più interessanti si trovano nel caso che su X sia fissata qualche "struttura" rispettata da ϕ; per esempio nell'ambito dell'algebra lineare si ha:
Esempio 2. Sia $T : V \to V$ una trasformazione affine ove V è uno spazio vettoriale su un corpo k. Se T è periodica di un periodo n che sia invertibile in k (ossia se k ha caratteristica non nulla p questa deve essere prima con n), essa ha necessariamente un punto fisso.

Esempio 3. Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita dispari e sia $T : V \to V$ un automorfismo lineare; esso induce una trasformazione biunivoca in se dell'insieme $\mathbb{P}(V)$ dei sottospazi vettoriali di V di dimensione uno che ha sicuramente qualche punto fisso. Da ciò si può dedurre che ogni isometria diretta di $\mathbb{R}^3$ in se è una rotazione rispetto ad una retta per l'origine.

Esamineremo ora alcuni casi in cui X è uno spazio topologico e ϕ è continua. Ad esempio è facile dimostrare che nel caso X sia l'intervallo $[0, 1]$ ogni ϕ ha almeno un punto fisso, mentre se X è la sfera di dimensione 1, ciò non è detto. Leggermente più complicato è svolgere il seguente:
Esempio 4. Si determinino le lettere (stampatello maiuscolo) dell'alfabeto latino, considerate nel modo ovvio come uno spazi topologici, per le quali ogni applicazione continua di esse in se stesse ha necessariamente qualche punto fisso.

In certi casi, si possono dare condizioni sulla trasformazione ϕ di uno spazio topologico X in se, che assicurano l'esistenza di punti fissi. Si considerino ad esempio le applicazioni continue $\phi : S^1 \to S^1$. Esse sono ripartite in classi di omotopia secondo il grado (definito considerando l'automorfismo indotto sul primo gruppo di omotopia: vedi precisazioni nel seguito). Si ha il seguente:
Esempio 5. Ogni applicazione continua $\phi : S^1 \to S^1$ di grado $n \in \mathbb{Z}$ ha almeno $|n-1|$ punti fissi distinti. (suggerimento: il rilevamento di ϕ al rivestimento universale, è una applicazione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per la quale per $x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x+1) = f(x) + n$)

Il teorema che segue è uno dei più importanti nelle applicazioni all'analisi. Faremo vedere come esso sia deducibile dal "lemma di non retrazione" che sarà dimostrato più avanti utilizzando la teoria dell'omologia. Il resto del paragrafo mostra come con tecniche solo geometriche (quindi più "elementari"), sia possibile dimostrare tale lemma ottenendone inoltre una importante precisazione. Le argomentazioni svolte, aiuteranno anche a comprendere (psicologicamente, perché ne saranno formalmente indipendenti) la teoria degli schemi simpliciali del paragrafo successivo.

Teorema 1 (Brouwer)
Ogni trasformazione continua in se del disco $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| \leq 1\}$ possiede almeno un punto fisso

Per $n = 0$ il fatto è ovvio. Per $n = 1$ è ancora facile: se ϕ è una trasformazione continua di $D^1 = [0, 1]$ in se, consideriamo l'insieme dei punti x di D^1 per cui $\phi(x) > x$ e l'insieme B di quelli per cui $\phi(x) < x$; essi sono due aperti disgiunti e quindi essendo D^1 connesso non possono avere per unione tutto D^1.
Per $n > 1$ la dimostrazione è un pò più difficile. Si ragione di solito per assurdo; se esistesse $\phi : D^n \to D^n$ continua e senza punti fissi, si potrebbe costruire una $r : D^n \to S^{n-1}$ continua e tale che $r(x) = x$ se $x \in S^{n-1}$: basta definire $r(x)$ come l'intersezione di S^{n-1} con la semiretta chiusa di origine x e che passa per $\phi(x)$ (facile dedurre la continuità di r da quella di ϕ; lo si faccia per esercizio). Basterà quindi dimostrare il seguente:

Lemma 2 (di non retrazione) *Ogni applicazione $r : D^n \to S^{n-1}$ che fissi i punti di S^{n-1} è discontinua*

Un approccio geometrico. Il *diametro* di un sottoinsieme$A$ di uno spazio metrico X è l'estremo superiore dell'insieme $\{d(x, y) \ : \ x, y \in A\}$ e sarà indicato con $diam(A)$. Se $f : X \to Y$ è una applicazione tra spazi metrici ed $x_0 \in X$, l'estremo inferiore dell'insieme $\{diam(f(B(x_0, r))) \ : \ r \in \mathbb{R}^+\}$ sarà indicato con $\sigma(f; x_0)$ e detto *modulo di discontinuità* di f in x_0 : evidentemente σ si annulla precisamente nei punti di X nei quali f è continua. L'estremo superiore $\sigma(f)$ dei $\sigma(f; x)$ per $x \in X$ sarà detto *modulo di discontinuità* di f.
Per $A \subset \mathbb{R}^n$ indicheremo con $\hat{A}$ il suo inviluppo convesso. Siano D un compatto convesso di $\mathbb{R}^n$, x_0 un suo punto interno ed S la frontiera topologica di D in $\mathbb{R}^n$. E' chiaro che esiste $\rho > 0$ tale che se $A \subset S$ ha diametro inferiore a ρ allora x_0 non appartiene ad $\hat{A}$. Ad esempio se D è il disco chiuso unitario di centro l'origine in $\mathbb{R}^n$ ed $x_0 = 0$ allora il minimo di tali ρ è $\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}$ (corrisponde al caso

in cui A è un insieme equilatero di $n+1$ punti della sfera $(n-1)$-dimensionale. Sia fissato un tale ρ; si ha allora il seguente:

Lemma 3 (di non retrazione) *Ogni applicazione $r : D \to S$ che fissi i punti di S ha modulo di discontinuità almeno ρ*

Per la dimostrazione abbiamo bisogno di introdurre alcune definizioni.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. L'inviluppo convesso $\hat{\Delta}$ di un sottoinsieme finito $\Delta \subset V$ è detto un *poliedro convesso* in V; se Δ è costituito da $(p+1)$ vettori affinemente indipendenti, $\hat{\Delta}$ viene detto un *$p-$simplesso.* Si dimostra che se Δ , Γ sono sistemi affinemente indipendenti in V e $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ allora $\Delta = \Gamma$; in altre parole un $p-$simplesso determina univocamente i suoi *vertici.* Si dice che un simplesso $\hat{\Delta}$ è una *faccia* di un simplesso $\hat{\Gamma}$ se $\Delta \subset \Gamma$. Una *triangolazione* di un sottoinsieme $Q \subset V$ è una famiglia finita $\mathcal{K}$ di simplessi di V tale che:
- Q è l'unione degli elementi di $\mathcal{K}$
- ogni faccia di un elemento di $\mathcal{K}$ stà in $\mathcal{K}$
- l'intersezione di due simplessi di $\mathcal{K}$ è un simplesso che è faccia di entrambi

In tal caso diremo che Q è un *poliedro* in V e che è il *supporto* di $\mathcal{K}$.
Si può dimostrare (senza troppe difficoltà) che un poliedro convesso è un poliedro, ossia che è supporto di qualche triangolazione.
Il *$p-$simplesso standard* S_p è definito come l'inviluppo convesso della base canonica di $\mathbb{R}^{p+1}$; la sua frontiera ∂S_p è il poliedro triangolato da tutte le facce proprie di S_p.
Sia fissato su V un prodotto scalare definito positivo. Chiameremo *diametro* di una triangolazione di un poliedro di V il massimo dei diametri dei simplessi che la costituiscono. Descriviamo ora una costruzione che ad ogni triangolazione $\mathcal{K}$ di un poliedro Q associa un'altra triangolazione $\mathcal{K}^{(1)}$ di Q detta sua *suddivisione baricentrica* e avente diametro più piccolo in un modo che iterando la procedura, si ottengono triangolazioni $\mathcal{K}^{(1)}$ $\mathcal{K}^{(2)}$.. di Q i cui diametri tendono a zero. Si procede nel modo che segue.
Se s è un $p-$simplesso chiamiamo suo *baricentro* la media $B(s) = \frac{1}{p+1}\sum_{x \in s} x$.
La triangolazione $\mathcal{K}^{(1)}$ è allora costruita così : per ogni successione crescente $s_0 \subset s_1 \subset .. \subset s_p$ di simplessi di $\mathcal{K}$ ove s_i ha dimensione i, si prende il $p-$simplesso di vertici $B(s_0), \ldots, B(s_p)$. Che tali simplessi costituiscano una triangolazione del supporto di $\mathcal{K}$ si dimostra con facili considerazioni di algebra lineare. Si noti che la nuova triangolazione ha tanti vertici quanti erano i simplessi non vuoti della precedente.
Vediamo ora quanto rimpicciolisce il diametro della triangolazione passando alla suddivisione baricentrica. Basterà comparare il diametro di un simplesso con quello dei suoi suddivisi. Sia dunque $\Delta = \{x_1, \ldots, x_r\}$ l'insieme dei vertici di un simplesso s di $\mathcal{K}$.

Lemma 4 *Per $y \in V$ ed $x \in \hat{\Delta}$ si ha:*

$$||y-x|| \leq sup_{i=1,\ldots,r}||y-x_i||$$

Dim. Se $x = \sum_1^r \lambda_i x_i$ si ha:

$$||y-x|| = ||(\sum_1^r \lambda_i)y - \sum_1^r \lambda_i x_i|| = ||\sum_1^r \lambda_i(y-x_i)|| \leq \sum_1^r \lambda_i ||y-x_i|| \leq sup_{i=1,\ldots,r}||y-x_i||$$

Corollario 5 *$diam(\Delta) = diam(\hat{\Delta})$*

Corollario 6 *Per $y \in \hat{\Delta}$ si ha $||y - B(s)|| \leq \frac{r-1}{r} diam(s)$. Ne segue che se $\mathcal{K}$ è una triangolazione di un poliedro Q fatta con simplessi di dimensione al più n allora $diam(\mathcal{K}^{(1)}) \leq \frac{n}{n+1}\, diam(\mathcal{K})$. Conseguentemente $lim_{i\to\infty} diam(\mathcal{K}^{(i)}) = 0$*

Avremo bisogno anche di suddivisioni "relative" : siano $\mathcal{K}$ una triangolazione di un poliedro X ed $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ una triangolazione di un poliedro Y (diremo in tal caso che Y è un *sottopoliedro* di X). La *suddivisione baricentrica relativa* si fa introducendo come vertici i baricentri dei simplessi non appartenenti ad $\mathcal{L}$; precisamente si prendono i seguenti simplessi:
- per ogni successione crescente $s_0 \subset s_1 \subset .. \subset s_p$ di simplessi di $\mathcal{K}$ ove s_i ha dimensione i ed $s_0 \notin \mathcal{L}$, si prende il $p-$simplesso di vertici $B(s_0), \ldots, B(s_p)$
- per ogni successione crescente $s_p \subset s_{p+1} \subset ... \subset s_q$ ove s_i ha dimensione i , il simplesso s_p stà in $\mathcal{L}$ ed il simplesso s_{p+1} no, si prende il simplesso inviluppo convesso di $s_p \cup \{B(s_{p+1}), ..., B(s_q)$. In questa suddivisione i simplessi di $\mathcal{L}$ rimangono invariati; tutti gli 1-simplessi che non sono in $\mathcal{L}$ diminuiscono di diametro come quelli della suddivisione prima descritta.

Dimostrazione del lemma di non retrazione
Costruiamo un poliedro inscritto in D : si scelga un $\delta > 0$ tale che per $x, y \in D$ con $|x - y| < \delta$ sia $|r(x) - r(y)| < \rho$. Si prenda quindi un $n-$simplesso Δ in $\mathbb{R}^n$ contenente 0 all'interno e si consideri la proiezione $\phi : \partial\Delta \to S$ di centro punto x_0 ; è facile verificare che questa è un omeomorfismo. Si iteri quindi la suddivisione baricentrica di Δ di modo che per ogni simplesso s contenuto in $\partial\Delta$, l'insieme $\phi(s)$ abbia diametro inferiore a δ. Si considerino ora i simplessi ottenuti come inviluppo convesso di insiemi del tipo $\{\phi(v_0), ..., \phi(v_p)\}$ ove $v_0, ..., v_p$ sono i vertici di un $p-$siplesso contenuto in $\partial\Delta$; si ottiene così una triangolazione di un poliedro S' che è "inscritto" in S. Aggiungendo gli inviluppi convessi tra un elemento di tale triangolazione ed x_0 si ha una triangolazione di un poliedro convesso D'. I simplessi di S' hanno diametro inferiore a δ; iterando la suddivisione baricentrica relativa, si ottiene infine una triangolazione di Δ con simplessi tutti di diametro inferiore a δ. Costruiamo ora una nuova retrazione $r' : D \to S$ definendola uguale a ϕ nei punti che non appartengono a D' e per x che appartiene ad un simplesso s di D', trasformando x con l'unica applicazione affine su s che coincide con r nei vertici e proiettando quindi il risultato su S tramite ϕ; ciò è possibile perché per ipotesi x_0 non appartiene all'inviluppo convesso dei trasformati dei vertici di s.
Sia ora $x \in S$ non nell'immagine di alcun simplesso di dimensione $n - 2$ di D' (per dimostrare che ce ne sono, basta osservare che ϕ dà un omeomorfismo tra S' ed S e che un $(n - 1)-$simplesso non può essere contenuto in una unione finita di sottospazi affini di dimensione al più $n - 2$). Allora $r^{-1}(x)$ sarebbe un poligono (supporto di una triangolazione di dimensione 1 in cui ogni vertice appartiene ad uno od a due $1-$simplessi) che avrebbe un solo punto di bordo (da cui cioè parte un solo "lato") ed un tale oggetto non esiste.

1.Schemi simpliciali Sia I un insieme. Diremo *simplesso* di dimensione p in I ogni suo sottoinsieme di cardinalità $p+1$; in particolare il sottoinsieme vuoto è l'unico simplesso di dimensione -1. I sottoinsiemi di un simplesso sono detti le sue *facce* ; due simplessi sono *incidenti* se uno è faccia dell'altro.

Uno *schema simpliciale* su I è una famiglia K di simplessi di I verificante le condizioni seguenti:
- ogni $0-$simplesso di I appartiene a K
- ogni faccia di un simplesso di K appartiene a K

Esso sarà indicato con (I, K) o semplicemente K quando è chiaro chi sia I. I suoi simplessi di dimensione 0 , 1 , 2 , 3... saranno detti *vertici, spigoli, triangoli (o facce), tetraedri ....*
Ad esempio sia $I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e consideriamo lo schema che ha gli elementi di I come insieme dei vertici e gli insiemi $\{i, i+1\}$ per $i \in I$ come spigoli: esso sarà indicato come il *poligono chiuso* (standard) di n lati; se si aggiungono ad esso come faccie i simplessi $\{0, i, i+1\}$ per $i = 1, ..., n-2$, si ha uno schema che chiameremo *disco poligonale chiuso* (standard) di n lati.

La dimensione di uno schema è l'estremo superiore delle dimensioni dei suoi simplessi. Un *morfismo* tra schemi (I, K) e $I', K')$ è una applicazione $\phi : I \to I'$ tale che $\phi(s) \in K'$ se $s \in K$. Se ϕ è una inclusione, diremo che (I, K) è un *sottoschema* di (I', K'). Ad esempio sia K uno schema simpliciale; l'insieme K^n dei suoi simplessi di dimensione al più n è un sottoschema che viene detto il suo $n-$*scheletro.* Fissato un simplesso t, l'insieme $S(t)$ costituito dai simplessi s tali che $s \cup t$ è ancora un simplesso di K è un sottoschema detto lo *star* di t in K; i simplessi di $S(t)$ che non intersecano t costituiscono pure un sottoschema $L(t)$ che viene detto il *link* di t in K. L'*esterno* di t in K è il sottoschema $E(t)$ formato dai simplessi che non hanno vertici comuni con t. Infine l'insieme $U(t)$ dei simplessi che hanno qualche vertice in comune con t è detto l'*intorno aperto* di t in K; si noti che questo non è più, in generale un sottoschema di K ma solo un insieme di simplessi. Se $s \in K$ è un simplesso, esso verrà spesso identificato al sottoschema di K formato da tutte le sue facce; il sottoschema $\dot{s}$ formato dalle sue facce proprie verrà detto il suo *bordo.*
Uno schema sarà detto *sconnesso* se è possibile ripartire i suoi vertici in due sottoinsiemi non vuoti di modo che ogni simplesso dello schema sia sottoinsieme di uno solo di essi; altrimenti diremo che è *connesso.* Evidentemente ogni schema simpliciale è decomponibile in un solo modo nell'unione disgiunta di sottoschemi connessi; essi verranno detti le *componenti connesse* dello schema dato.
Uno schema simpliciale K è *finito* se lo è in quanto insieme; in tal caso è possibile introdurre la sua *caratteristica di Eulero-Poincaré* come la somma alternata $\chi(K) = v_0 - v_1 + v_2 + ...$ ove v_i indica la cardinalità dell'insieme dei suoi simplessi di dimensione i. Uno schema K è *localmente finito* se $S(s)$ è finito per ogni suo simplesso s; equivalentemente se il link di ogni suo vertice è finito.

Come associare ad uno schema simpliciale localmente finito uno spazio topologico

Dato un insieme I considereremo sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{(I)}$ delle applicazioni $x : I \to \mathbb{R}$ aventi supporto finito, la norma $||x|| = (\sum_{i \in I} x(i)^2)^{1/2}$. Per $i \in I$ sia $e_i : I \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $e_i(j) = \delta_{ij}$ (ossia 0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$). Gli $(e_i)_{i \in I}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^{(I)}$ e verranno identificati agli elementi di I. Se K è uno schema simpliciale localmente finito su I, il suo *supporto ge-*

ometrico o *poliedro* (simpliciale) *associato* è il sottoinsieme $|K|$ di $\mathbb{R}^{(I)}$ unione di tutti gli inviluppi convessi di elementi di K. Si verifica facilmente che $|K|$ è l'insieme delle $x : I \to \mathbb{R}$ che non sono negative, $\sum_{i \in I} x(i) = 1$ e tali che $\{i \in I \ : \ x(i) \neq 0\}$ è un simplesso di K. Doteremo $|K|$ della topologia indotta dalla norma definita sopra su $\mathbb{R}^{(I)}$. Questa costruzione permette di collegare considerazioni di carattere puramente combinatorio, ossia ottenute in soli termini di schemi simpliciali, con altre di carattere topologico.
Infatti non solo ad ogni schema K si può associare lo spazio topologico $|K|$ ma anche ad ogni morfismo di schemi simpliciali $\phi : (I, K) \to (I', K')$ si può associare una applicazione continua $|\phi| : |K| \to |K'|$ prolungando in modo affine su ogni simplesso di K l'applicazione ϕ definita inizialmente sui vertici e ottenendo così un funtore dalla categoria degli schemi simpliciali in quella degli spazi topologici. In questo modo si può tentare di studiare uno spazio topologico X sul quale sia dato un omeomorfismo con un poliedro $|K|$ (si parlerà di *triangolazione* di X) mediante considerazioni combinatorie sullo schema K. Quasi tutti gli spazi "decenti" di dimensione finita ammettono una triangolazione (finita se compatti altrimenti si devono usare schemi "localmente finiti"..); ad esempio ogni luogo di zeri di funzioni analitiche è rappresentabile in tal modo.

Come associare ad uno spazio topologico uno schema simpliciale

Sia X un insieme ed $\mathcal{U} = (U_i)i \in I$ un suo ricoprimento costituito da sottoinsiemi non vuoti (saremo interessati al caso in cui X è uno spazio topologico ed $\mathcal{U}$ un suo ricoprimento aperto). Si costruisce uno schema simpliciale $N(\mathcal{U})$ su I scegliendo $i_0, ..., i_p$ come vertici di un simplesso se e solo se $U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_p} \neq \emptyset$; questo è detto il *nerbo* di $\mathcal{U}$ ed è utile in molte situazioni. Esso è finito se e solo se anche $\mathcal{U}$ lo è. Se poi $\mathcal{U}$ è un ricoprimento localmente finito di uno spazio topologico X costituito da aperti relativamente compatti, allora il suo nerbo sarà localmente finito. In questo caso, un collegamento tra X ed il suo nerbo si trova così : sia $(\phi_i)_{i \in I}$ una partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{U}$ ossia una famiglia di funzioni continue $\phi_i : X \to \mathbb{R}$, tali che per ogni $i \in I$, ϕ_i sia non negativa con supporto contenuto in U_i e si abbia inoltre che per ogni $x \in X$ la somma dei $\phi_i(x)$ (tutti nulli salvo un numero finito) faccia 1. Allora per ogni $x \in X$ la succesione $(\phi_i(x))_{i \in I}$ è un elemento di $N(\mathcal{U})$; si ha quindi una applicazione $\phi : X \to N(\mathcal{U})$ ed è facile verificare che essa è continua. Se ϕ_0, ϕ_1 sono due tali applicazioni, ottenute a partire da due diverse partizioni dell'unità, entrambi però subordinate al ricoprimento $\mathcal{U}$, esse saranno distinte ma sono omotope tra loro: esiste cioè una applicazione continua $\Phi : X \times [0, 1] \to N(\mathcal{U})$ tale che per $x \in X$ ed $i \in \{0, 1\}$ si abbia $\Phi(x, i) = \phi_i(x)$. Sono cioè "deformabili con continuità" l'una nell'altra. Basta infatti definire $\Phi(x, \lambda) = (1 - \lambda)\phi_0(x) + \lambda\phi_1(x)$.

Grafi e superficie

Chiamiamo *grafo* uno schema simpliciale ogni cui componente connessa abbia dimensione uno. Un *albero* è un grafo connesso che non possiede sottoschemi del tipo poligono chiuso.

Lemma 7 *Un grafo connesso finito è un albero se e solo se* $\chi(\Gamma) = 1$

Dim. Si parta da uno spigolo, aggiungendo successivamente spigoli che hanno un solo vertice nel sottoschema precedentemente costruito; ognuno di questi è un albero ed ha caratteristica 1. Essendo il grafo connesso, tutti i vertici dovranno essere inclusi nell'ultimo schema ottenuto. Quindi la caratteristica del grafo vale 1 meno il numero di spigoli lasciati fuori.

Chiamiamo *superficie* (poliedrale) ogni schema simpliciale di dimensione due verificante le seguenti condizioni:

1. ogni spigolo appartiene esattamente a due facce
2. il link di ogni vertice è connesso e non vuoto

E' facile dimostrare che in tal caso il link di ogni vertice è un poligono chiuso. Se invece della 1. supponiamo:

1'. ogni spigolo appartiene ad una o due facce

lo schema sarà chiamato *superficie a bordo.* In tal caso l'insieme degli spigoli che appartengono ad una sola faccia, assieme ai loro vertici, costituiscono un sottoschema che è un grafo; esso viene detto *bordo* della superficie ed è facile dimostrare che ogni sua componente connessa è del tipo poligono chiuso.

Orientazioni

Diremo che un simplesso è orientato se è fissata una classe di parità (i cui elementi saranno detti *positivi*) per gli ordinamenti dell'insieme dei suoi vertici. Se $(i_0, ..., i_n)$ è un ordinamento positivo per i vertici di un $n-$simplesso orientato, allora la faccia ottenuta eliminando i_h sarà orientata dall'ordinamento indotto se h è pari altrimenti in modo opposto. Due $n-$simplessi distinti sono *contigui* se hanno una faccia di dimensione n-1 in comune; in tal caso orientazioni di essi saranno dette *concordi* se inducono orientazioni opposte su tale faccia. Una superficie è orientabile se è possibile orientare i suoi simplessi di dimensione 2 (le sue facce) in modo che quelli contigui siano concordi. Nel seguito, supporremo, salvo mensione esplicita, che ogni superficie sia connessa.

Classificazione delle superficie poliedrali

Sia X una superficie poliedrale orientata. Data una curva poligonale semplice C di n lati in X (brevemente: C un $n-$poligono in X) si costruisce un nuovo schema simpliciale chiamato "X tagliata lungo C" : si raddoppiano tutti i simplessi di C e si ridefiniscono in modo ovvio le relazioni di appartenenza. Si hanno due possibilità: lo schema ottenuto è connesso ed è una superficie a bordo col bordo fatto di due componenti connesse; oppure è sconnessa ed allora ogni componente connessa è una superficie a bordo con bordo connesso. Nel primo caso diremo che C non divide X. Se ciò accade, si può costruire una nuova superficie $\tilde{X}$ senza bordo attaccando alla superficie tagliata due dischi poligonali di n lati con una triangolazione standard od altra che si voglia usare. In ogni caso la caratteristica di Eulero-Poincaré aumenta di due ossia $\chi(\tilde{X}) = \chi(X) + 2$. Questa è detta ottenuta da X per *chirurgia* lungo la poligonale C.
Costruzione di una caverna massimale. Data una superficie X si scelga una faccia F_1 di partenza; la seconda faccia che scegliamo è una qualsiasi faccia F_2 adiacente ad F_1. In generale la faccia scelta sarà una non ancora selezionata e nella quale si possa "entrare" passando da uno spigolo non ancora "attraversato". Incollando tra loro successivamente le facce selezionate si ottiene alla fine uno schema D isomorfo ad una triangolazione (in generale non standard) del poligono regolare ed una applicazione $\sigma : D \to X$ surgettiva col bordo di D che si "applica due volte" su un grafo Γ in X detto *grafo residuo della caverna.* Tale grafo è necessariamente connesso e quindi ha caratteristica al più 1; ne segue

che X ha caratteristica al più 2. Per quanto visto sopra quindi, dopo un numero finito di tagli si avrà una superficie priva di curve che non la dividono. Ripetendo la costruzione precedente per una tale superficie, siccome il grafo residuo non sconnette X, esso non può contenere poligoni chiusi ed è quindi un albero. Ne segue che una tale superficie ha precisamente caratteristica 2.
si è quindi dimostrata la seguente:

Proposizione 8 *Ogni superficie finita orientabile dopo un numero finito di chirurgie lungo curve poligonali che non la sconnettono, diviene una superficie di caratteristica 2 che viene sconnessa da ogni sua poligonale chiusa.*
In particolare la caratteristica della superficie data è pari e non superiore a 2

Corollario 9 *Ogni superficie con bordo non vuoto che sia finita orientabile, ha caratteristica dispari non superiore ad 1. Se ha caratteristica 1, viene sconnessa da ogni poligonale aperta che congiunga due suoi punti del bordo.*

Dim. Aggiungendo dischi poligonali lungo le componenti del bordo, la caratteristica aumenta esattamente del numero di queste. Per la proposizione precedente la superficie ottenuta ha caratteristica non superiore a 2 e questo dimostra la prima parte dell'enunciato. Per la seconda parte si ragiona come per la proposizione precedente: data una poligonale che unisce due punti del bordo, si tagli lungo essa; la superficie ottenuta ha caratteristica 2 e quindi, avendo bordo non vuoto, deve essere sconnessa.

A questo punto si può già capire che una tale superficie è "topologicamente" S^2; ad esempio perché è unione di un intorno dell'albero residuo (che "è" un disco) e di una piccola contrazione della caverna costruita (anch'essa un disco). Ma è più preciso ed anche interessante ottenere tale risultato attraverso il seguente tipo di argomentazioni. Sia Y una superficie a bordo; un vertice del bordo è detto *collassabile* se appartiene ad una unica faccia di Y. Uno spigolo del bordo è detto *collassabile* se l'altro vertice della faccia cui appartiene non stà sul bordo di Y. Due simplessi di uno schema sono detti *incidenti* se uno di essi è faccia dell'altro.

Proposizione 10 *Ogni superficie a bordo non vuoto avente caratteristica* 1 *possiede almeno due elementi collassabili e non incidenti*

Dim. Fissiamo uno spigolo di bordo. Se esso è collassabile, eliminandolo assieme alla faccia che lo contiene si ha una superficie a bordo ancora di caratteristica 1 e con meno simplessi; per ipotesi di induzione questa ha almeno un elemento collassabile non incidente col vertice opposto allo spigolo di partenza; esso sarà allora anche collassabile nella superficie originaria. Se invece tale spigolo non è collassabile ma è collassabile uno dei suoi estremi, eliminiamolo assieme alla faccia ed a i due spigoli cui appartiene; lo schema che ne risulta è una superficie a bordo (a meno che la superficie originaria non fosse un triangolo, ma allora l'enunciato è banale); ragionando come sopra su essa si dimostra nuovamente l'esistenza di un altro elemento collassabile della superficie di partenza. Esaminiamo infine il caso che né lui né i suoi estremi siano collassabili. Si elimini esso con la faccia cui appartiene e si raddoppi il vertice opposto, costruendo una nuova superficie analogamente a quanto fatto con le chirurgie; per il precedente corollario questa è sconnessa ed il solito tipo di calcolo per le caratteristiche dice che è costituita da due componenti connesse ognuna di caratteristica 1.

Per ipotesi di induzione ognuna di esse verifica l'enunciato e fornisce quindi almeno un elemento collassabile non incidente con quello di taglio che è quindi anche collassabile per la superficie di origine.

Chiamiamo *espansione di tipo* 0 per una superficie a bordo, l'aggiunzione di una 2−faccia con base uno spigolo del bordo ed un nuovo vertice; si ha così una nuova superficie a bordo con un vertice una faccia e due spigoli in più. Chiameremo *espansione di tipo* 1 l'aggiunta di una faccia con due lati sul bordo ed un nuovo lato: la superficie ottenuta avrà gli stessi vertici mentre facce e spigoli saranno uno di più.

Corollario 11 *Ogni superficie a bordo non vuoto di caratteristica* 1 *è ottenibile da un triangolo per successive operazioni di espansione di tipo* 0 *ed* 1

Siano X una superficie poliedrale e $T = \{a, b, c\}$, $S = \{b, c, d\}$ due suoi simplessi distinti di dimensione due tali che $\{a, d\}$ non sia un simplesso di X. Eliminando da X i simplessi T , S ed il loro lato comune $\{b, c\}$ ed introducendo i simplessi $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ e $\{a, d\}$ si ottiene una superficie $\tilde{X}$ che sarà detta ottenuta per *commutazione elementare* da X. Diremo *quasi-isomorfe* due superficie ottenibili l'una dall'altra con una successione di commutazioni elementari. Una superficie ottenuta dal triangolo con un numero finito di espanzioni di tipo 0 sarà chiamata *disco elementare.* Ad esempio il disco poligonale standard è elementare.

Lemma 12 *Ogni n-disco elementare è quasi-isomorfo all' n-disco standard*

Dim. Per induzione: ogni espansione di tipo 0 dell' n-disco standard o è già l' (n+1)-disco standard o lo diviene dopo una commutazione.

Supponiamo ora che una superficie a bordo Y sia ottenibile da una X con una espansione di tipo 1 seguita da una di tipo 0. Se la seconda espansione non ha per base lo spigolo introdotto dalla prima, l'ordine in cui sono eseguite le espansioni può essere invertito. Altrimenti, con una commutazione elementare su Y si ha una $\tilde{Y}$ ottenibile con una espansione di tipo 0 seguita da un' altra di tipo 1. Si ha la seguente:

Proposizione 13 *Ogni superficie X di caratteristica due avente n vertici è quasi-isomorfa ad una superficie ottenuta per identificazione tra i bordi di due n-dischi elementari*

Dim. Si tolga ad X una faccia; la superficie che resta può essere costruita a partire da un triangolo con $n - 3$ espansioni di tipo 0 e ottenendo così un disco elementare con n vertici, seguite da espansioni di tipo 1; quest'ultime possono essere considerate espansioni di tipo 0 a partire dal triangolo tolto inizialmente dando luogo così ad un altro disco elementare con n vertici.

Commento finale alla classificazione

Sia X una superficie finita orientata e sia g definito da $\chi(X) = 2 - 2g$; tale g è detto il *genere* della superficie. Abbiamo visto che la superficie è costruibile dallo schema ottenuto incollando per il bordo due n-dischi standard, operando alcune commutazioni, poi togliendo $2g$ punti assieme ai loro intorni aperti (che devono essere disgiunti) ed incollando quindi a coppie i bordi che si sono formati.

E' chiaro che se per ogni tale punto si toglie solo un triangolo di cui è faccia e poi si identificano a coppie i bordi rimasti, si ottiene una superficie che dà un poliedro omeomorfo a quello dato da X. Anche si possono spostare i triangoli in adiacenti ... . Insomma si dimostra ora facilmente che se due tali superficie hanno la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré, allora sono omeomorfe l'una all'altra. Si possono anche dare, se interessa, enunciati di equivalenza combinatoria direttamente per gli schemi ma credo che sia stato descritto già sufficientemente il quadro generale dei problemi e delle tecniche poliedrali in questo settore e passeremo ad altro. Per chi interessa, un esercizio-problema che mi sembra interessante è decidere se è vera o falsa la seguente affermazione (non saprei dire quanto sia facile dare una risposta):
- Due superficie aventi egual numero di vertici e stessa caratteristica di Eulero-Poincaré, possono essere trasformate l'una nell'altra con sole operazioni di commutazione (ossia sono quasi-isomorfe)?

Varietà di dimensione 3. Sia s un simplesso d'uno schema simpliciale K. La *sezione trasversale* ad s è lo schema simpliciale $\mathcal{T}(s)$ ottenuto prendendo come simplessi tutti gli insiemi $t - s$ per t simplesso di K che contiene s; se $dim(s) = 0$ (ossia se è un vertice) $\mathcal{T}(s)$ coincide col suo link $\mathcal{L}(s)$. Definiamo le sfere di dimensione h per $h = -1, 0, 1, 2$ nel seguente modo:
- per $h = 0$ lo schema vuoto
- per $h = 0$ lo shema costituito da due vertici isolati
- per $h = 1$ lo schema poligono chiuso di $n \geq 3$ lati
- per $h = 2$ ogni shema finito che sia una superficie con caratteristica 2

Per $0 \leq n \leq 3$ chiameremo *varietà di dimensione* n ogni schema connesso ogni cui $p-$simplesso abbia per sezione trasversale una sfera di dimensione $n-p-1$. E' evidente che l'unica varietà di dimensione 0 è quella costituita da un punto isolato, in dimensione 1 è un poligono chiuso di $n \geq 3$ lati ed in dimensione due si riottengono le superficie. In contrasto con la semplicità della classificazione di varietà di dimensione al più 2, quella di dimensione 3 è incredibilmente complicata, almeno per quello che se ne sa sino ad oggi. Osserviamo solo che la caratteristica, che come abbiamo visto, "individua" completamente una superficie finita, nel caso delle $3-$varietà non dà nessuna informazione perché è sempre nulla. Infatti sia K una $3-$varietà finita di dimensione 3 e siano v, s, f, t rispettivamente il numero di vertici, spigoli, facce e tetraedri che la compongono. La condizione che la sezione trasversale di ogni faccia siano due punti, dà la relazione $f = 2t$. Fissato un vertice i di K, indichiamo con s_i, f_i, t_i rispettivamente il numero di spigoli,facce e tetraedri che lo contengono. Siccome togliendo i a tali simplessi si ottiene la sezione trasversale ad i che ha per ipotesi caratteristica due, si avrà $s_i - f_i + t_i = 2$. Sommando al variare di i si ha:

$$\sum_i s_i - \sum_i f_i + \sum_i t_i = v$$

La somma di tutti gli s_i non dà s (perché in essa tutti gli spigoli dello schema compaiono due volte avendo ogni spigolo ha due vertici), ma $2s$. Analogamente la somma degli f_i dà $3f$ e quella dei t_i vale $4t$. La formula precedente può quindi essere riscritta così :

$$2s - 3f + 4t = v$$

Sostituendo nella relazione $2\chi(K) = 2v - 2s + 2f - 2t$ a v il valore trovato, si ottiene $2\chi(K) = -f + 2t$ che è zero per quanto visto avanti.

Costruire per le 3- varietà una teoria analoga a quella mostrata per le 2-varietà (che come abbiamo visto è sostanzialmente di carattere elementare) è estremamente complicato e molte questioni rimangono irrisolte. Come esempio di tecniche più elborate che servono in tali studi, viene riportata in appendice una delle dimostrazioni, quella di Stalling, del fondamentale risultato denominato "loop theorem".

Presentazioni di gruppi. Siano S un insieme ed R una famiglia di successioni finite in $S \times \{-1, 1\}$. Un *morfismo* di (S, R) in un gruppo G è una applicazione $\nu : S \to G$ tale che per ogni $((s_1, \epsilon_1), ..., (s_n, \epsilon_n)) \in R$ si abbia:

$$\nu(s_1)^{\epsilon_1} \cdot ... \cdot \nu_n(s_n)^{\epsilon_n} = 1$$

La coppia $((S, R), \nu)$ è detta una *presentazione* di G con *generatori* S e *relazioni* R se per ogni altro morfismo $\tau : S \to H$ di (S, R) in un gruppo H, esiste uno ed un solo omomorfismo $\phi : G \to H$ verificante la relazione $\phi \circ \nu = \tau$. Un gruppo è detto *libero* se possiede presentazioni con $R = \emptyset$.
La definizione appena data può essere riformulata nel seguente modo più colloquiale: l'insieme S indicizza tramite ν degli elementi di G; dire che si ha un morfismo di (S, R) significa che gli elementi associati verificano in G le relazioni specificate da R. Dire che è una presentazione, significa che essenzialmente non verificano altre relazioni; ossia che per determinare un morfismo di G in un qualsiasi gruppo H basta specificare le immagini degli elementi che sono stati indicizzati con la sola accortezza che anche queste verifichino le relazioni indicate da R. Si riconoscerà facilmente una analogia di ciò con una analoga situazione in algebra lineare, in cui applicazioni lineari sono determinate dai valori assunti su una base.
Una applicazione $\nu : S \to G$ di un insieme S in un gruppo G è detta un *sistema di generatori* se per ogni $g \in G$ esiste una successione finita $((s_1, \epsilon_1), ..., (s_n, \epsilon_n))$ in $S \times \{-1, 1\}$ tale che $g = \nu(s_1)^{\epsilon_1} \cdot ... \cdot \nu(s_n)^{\epsilon_n}$.
Un modo più formale (o meglio "funtoriale") di definire cosa è un sistema di generatori, potrebbe essere il seguente: $\nu : S \to G$ è tale che per ogni altro gruppo W e applicazione $\tau : S \to W$ esiste al più un solo omomorfismo $\phi : G \to W$ tale che $\phi \circ \nu = \tau$. Nel caso analogo di spazi vettoriali (o se ci si restrige a soli gruppi abeliani) si può verificare facilmente che questa definizione coincide con l'altra; ma non è altrettanto chiaro che ciò accade anche nell' ambito (ossia nella "categoria") dei gruppi qualsiasi.
Altre questioni non del tutto banali sono le seguenti:
- dato S , esiste un gruppo G "libero" su S (ossia esistono un gruppo G ed una applicazione $\nu : S \to G$ ...)
- se $\nu : S \to G$ e $\tau : T \to G$ sono due presentazioni libere dello stesso gruppo G, allora S e T hanno la stessa cardinalità

Discuteremo di tali questioni più avanti. Per il momento noteremo soltanto come con considerazioni "universali" si ottenga il seguente teorema di unicità:

Teorema 14 *Se* $\nu : S \to G$ *e* $\nu' : S \to G'$ *sono due presentazioni con generatori* S *e relazioni* R *, esiste un (unico) isomorfismo* $\phi : G \to G'$ *tale che* $\nu' = \phi \circ \nu$.

Dim. Per ipotesi esistono $\phi : G \to G'$ e $\phi' : G' \to G$ tali che $\nu' = \phi \circ \nu$ e $\nu = \phi' \circ \nu'$; ne segue che $\sigma = \phi' \circ \phi$ è un endomorfismo di G verificante $\sigma \circ \nu = \nu$;

per la unicità richiesta in una presentazione ne segue che σ è l'identità su G. Analogamente $\phi \circ \phi'$ è l'identità su G' e quindi ϕ e ϕ' sono isomorfismi uno l'inverso dell'altro. Indicheremo con la notazione $< S, R >$ un qualsiasi gruppo così presentato (dimostreremo nel seguito che tale gruppo esiste sempre).

Esempio di un gruppo libero a due elementi. Sia V uno spazio vettoriale (di dimensione finita n su $\mathbb{R}$); indicheremo per $p \in \mathbb{N}$ con $\mathcal{G}(V,p)$ la *grassmaniana* costituita dai sottospazi vettoriali di V aventi dimensione p .
Una applicazione $f : G(V,P) \to G(V,p)$ è detta un *automorfismo* se essa è indotta da un automorfimo lineare di V; tali automorfismi costituiscono quindi un gruppo $Aut(Gl(V,p))$ isomorfo ad un quoziente di $Gl(n,\mathbb{R})$. Se $n = 2$ e $p = 1$ si ottiene la retta proiettiva $\mathbb{P}$ il cui gruppo di automorfismi è isomorfo al gruppo $Gl(2,\mathbb{R})$ quozientato per il sottogruppo delle omotetie. E' uso generale di indicare tali automorfismi utilizzando la coordinata non omogenea di $\mathbb{P} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; così ad esempio si scriverà $x \to 1/x$ per indicare l' automorfismo di $\mathbb{P}$ indotto dallo scambio degli assi su $\mathbb{R}^2$.
Asserzione: gli automorfismi $g(x) = x + 2$ ed $h(x) = 1/x$ generano un sottogruppo libero in $Aut(\mathbb{P})$.
Dim. Siano $\mathcal{D} = [-1,1] \subset \mathbb{P}$ e $\mathcal{D}'$ il suo complementare. Per ogni $n \neq 0$ l'insieme $g^n(\mathcal{D})$ è un sottoinsieme proprio di $\mathcal{D}'$; inoltre h scambia $\mathcal{D}$ con $\mathcal{D}'$. Ne segue che per ogni scelta di interi $n_1, ..., n_k$ dei quali almeno uno sia non nullo, gli automorfismi $k = g^{n_1}h...hg^{n_k}$ ed hk non possono essere l'identità su $\mathbb{P}$. Se ne deduce facilmente che $f = h^{-1}gh = hgh$ e g non soddifano alcuna relazione e sono quindi generatori "liberi" di un sottogruppo di $aut(\mathbb{P})$. Infatti f^n è l'identità solo se $n = 0$; allora se $f^{m_1} \cdot g^{n_1} \cdot ... \cdot f^{m_r} \cdot g^{n_r}$ è l'identità, scrivendo tale relazione in termini di g ed h si riconosce che tutti gli esponenti devono essere nulli.
Con qualche considerazione topologica si può dimostrare che "quasi tutte" le coppie di elementi di $Aut(\mathbb{P})$ generano un sottogruppo libero:

Teorema 15 *L'insieme delle coppie di elementi di $G = Aut(\mathbb{P})$ che non sodsifano alcuna relazione (ossia sono generatori "liberi" di un sottogruppo di G) costituisce un insieme denso in G^2*

Dim. Le possibili relazioni tra coppie di elementi di un gruppo sono una infinità numerabile. Ogni tale relazione R definisce una applicazione $\sigma_R : G^2 \ni (f,g) \mapsto R(f,g) \in G$ che è analitica per l'ovvia struttura di varietà analitica esistente su G: sia Ω la fibra di σ_R sull'identità (ossia l'insieme delle coppie (f,g) che verificano la relazione R). Se Ω avesse parte interna non vuota, data l'analiticità di σ_R ed il fatto che G è connesso se ne dedurrebbe che Ω coincide con tutto G^2, cosa che non accade perché come abbiamo visto sopra esistono due elementi di G che non verificano alcuna relazione. Quindi gli elementi di G^2 che non sono liberi da relazioni sono una unione numerabile di insiemi chiusi a parte interna vuota e quindi per il teorema di Baire costituiscono un insieme a parte interna vuota.

L'esempio sopra descritto può essere rimontato al gruppo G delle matrici quadrate d'ordine due a coefficienti reali (o complessi) partendo da:

$$\tilde{g}(x_0, x_1) = (x_0 + x_1) \quad \text{e} \quad \tilde{h}(X_0, x_1) = (x_1, x_0)$$

che inducono g ed h. In tal caso G è unione di aperti parametrizzabili con aperti di $\mathbb{R}^3$ (o di $\mathbb{C}^3$)) in modo tale che le operazioni di gruppo sono espresse da "funzioni razionali" (rapporti tra polinomi nelle variabili). La dimostrazione dell'analogo teorema allora si semplifica non occorrendo far ricorso alla nozione di struttura analitica, ma solo al principio di identità dei polinomi. Vedremo nel seguito che per ogni intero positivo n, il gruppo libero a due elementi contiene sottogruppi liberi in n elementi; se ne deduce (stessa dimostrazione) che quasi tutte le $n-$uple di elementi di G sono prive da relazioni e generano quindi un sottogruppo libero su n elementi.

Il gruppo fondamentale di uno schema simpliciale

Un *passo* in uno schema simpliciale K è un elemento $p = (a, b) \in I \times I$ tale che $\{a, b\} \in K$; a è il *punto iniziale* e b il *punto finale* del passo. Due passi p, q sono *consecutivi* se p finisce ove inizia q. Un *cammino* è una successione $\gamma = (p_1, \ldots, p_r)$ di passi consecutivi; chiameremo p_1 punto iniziale e p_r punto finale di γ : diremo anche che γ congiunge a a b. Due cammini $\alpha = (p_1, \ldots, p_r)$ e $\beta = (q_1, \ldots, q_s)$ sono *moltiplicabili* se $(p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s)$ è un cammino, ossia se p_r e q_1 sono consecutivi; tale cammino sarà allora detto *prodotto* di α per β ed indicato con $\alpha * \beta$. Chiameremo *ridotto* un cammino se nessun passo è seguito dal suo inverso; ogni cammino, se non ridotto, può essere contratto elementarmente sino a che diviene ridotto. Chiameremo *semplice* un cammino che non passa mai due volte per uno stesso vertice; diremo *laccio* un cammino chiuso ossia uno con identici estremi. Un *laccio semplice* sarà un cammino chiuso il cui unico vertice ripetuto è quello iniziale. Siano $a, b, c \in I$ con $\{a, b, c\} \in K$; diremo allora che il cammino $((a, b), (b, c))$ è *contraibile elementarmente* nel passo (a, c). Più in generale se in un cammino α che contiene due passi successivi $(a, b), (b, c)$ come sopra, sostituiamo tali passi col passo (a, c), otteniamo un cammino α' che diremo ottenuto da α per *contrazione elementare*; diremo anche che α è ottenuto da α' per *espansione elementare*.

Def. Due cammini α, β in K saranno detti *omotopi* se è possibile passare dall'uno all'altro con un numero finito di espansioni e/o contrazioni elementari; scriveremo in tal caso $\alpha \sim \beta$.

Questa è una relazione di equivalenza sui cammini di K che conserva punto iniziale e punto finale e il prodotto passa al quoziente, nel senso che se $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$ allora α e β sono moltiplicabili se e solo se lo sono α' e β' ed in tal caso $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$. Sia $i_0 \in I$; un *laccio* in i_0 è un cammino di K che inizia e finisce in i_0. Indichiamo con $\pi_1(K, i_0)$ l'insieme delle classi di omotopia di lacci in i_0; è facile verificare che il prodotto tra cammini induce in $\pi_1(K, i_0)$ una struttura di gruppo: esso sarà detto il *gruppo fondamentale* di K di punto base i_0.

Il gruppo fondamentale diviene un funtore dalla categoria degli schemi con punto base (cioè gli schemi in cui è stato fissato un vertice e dove i morfismi sono compatibili con tali scelte nel senso che applicano il punto base di partenza in quello di arrivo) nella categoria dei gruppi, associando ad ogni morfismo $\phi : (K_1, i_1) \to (K_2, i_2)$, l'omomorfismo $\pi_1(\phi) = \phi_* : \pi_1(K_1, i_1) \to \pi_1(K_2, i_2)$ definito in modo ovvio a livello dei cammini.

Teorema 16 (van Kampen) *Sia* (K, i_0) *uno schema con punto base e sia* $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *una famiglia di sottoschemi di* K *contenenti* i_0 *e tali che*

1. *per ogni* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ *, lo schema* $K_{\lambda_1} \cap K_{\lambda_2} \cap K_{\lambda_3}$ *è connesso*

2. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda = K$

Siano $\sigma_{\lambda\mu} : \pi_1(K_\lambda \cap K_\mu, i_0) \to \pi_1(K_\mu, i_0)$ *e* $\tau_\mu : \pi_1(K_\mu, i_0) \to \pi_1(K, i_0)$ *per* $\lambda, \mu \in \Lambda$ *, gli omomorfismi associati alle inclusioni. Allora,comunque siano assegnati un gruppo* G *ed omomorfismi* $\beta_\mu : \pi_1(K_\mu, i_0) \to G$ *per ogni* $\mu \in \Lambda$ *, verificanti per* $\lambda, \mu \in \Lambda : \beta_\mu \circ \sigma_{\lambda\mu} = \beta_\lambda \circ \sigma_{\mu\lambda}$ *, esiste uno ed un solo omomorfismo* $\beta : \pi_1(K, i_0) \to G$ *tale che* $\beta_\mu = \beta \circ \tau_\mu$ *per ogni* $\mu \in \Lambda$.

Nota. Nella versione preliminare di queste note, l'enunciato di questo teorema aveva l'ipotesi (più debole) che per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ lo schema $K_{\lambda_1} \cap K_{\lambda_2}$ fosse connesso. Uno studente del corso ha osservato che l'ipotesi trovata in altri testi era quella (ora data) che ogni intersezione di tre dei K_λ fosse connessa; effettivamente tale più forte ipotesi è indispensabile. Probabilmente sono caduto in errore perché in tutti gli esempi che avevo in mente (quelli in cui ho applicato il teorema nel seguito) i K_λ sono estenzioni indipendenti di uno stesso schema connesso K' , ossia $K_\lambda \cap K_\mu = K'$ per ogni $\lambda, \mu \in \Lambda$ e quindi l'ipotesi più forte era automaticamente verificata.
Che tale ipotesi sia indispensabile nel caso generale (quello che talvolta si presenta nelle applicazioni) si mostra col seguente semplice esempio: sia T un poligono di tre lati e sia K il "cono" su esso da un nuovo vertice 0 (si ha una superficie a bordo formata da tre triangoli disposti ciclicamente attorno al punto "interno" 0). Come sottoschemi, per ogni lato λ di T prendiamo K_λ ottenuto aggiungendo a T il $2-$simplesso che contiene tale lato. Allora ogni K_λ ed ogni intersezione di due di essi è connessa ed ha per gruppo fondamentale (punto base 0) il gruppo $\mathbb{Z}$; inoltre ogni inclusione induce l'isomorfismo identico. Se valesse il teorema di van Kampen, si avrebbe che il gruppo fondamentale di K dovrebbe essere $\mathbb{Z}$ mentre invece esso è banale.
A questo punto sembra opportuno dare, invece che di indicazioni di massima, la dimostrazione completa del teorema ora formulato in modo corretto .
Dim. Dato un laccio $\gamma = (p_1, \ldots, p_r)$ si scelgono $K_{\lambda_1}, \ldots, K_{\lambda_r}$ contenenti rispettivamente gli r passi di γ e si fissino cammini γ_i da i_0 al punto iniziale di p_i che siano contenuti in $K_{\lambda_{i-1}} \cap K_{\lambda_i}$ per $i = 2, \ldots, r-1$ (per $i = 1$ si può prendere γ_1 il cammino "costante" (i_0, i_0)).
Si hanno così lacci $p_1 * \gamma_2^{-1}$ in K_{λ_1} , $\gamma_2 * p_2 * \gamma_3^{-1}$ in K_{λ_2}, . .etc. il cui prodotto è un cammino in K omotopo a γ. Ciò implica intanto la parte riguardante l'unicità. Per dimostrare l'esistenza dell'omomorfismo β si utilizzano gli omomorfismi β_μ , calcolandoli sui lacci costruiti sopra e formando il loro prodotto in G. Si deve dimostrare che il valore ottenuto non dipende dalle scelte fatte dei cammini γ_i, non dipende dalla scelta dei K_{λ_i} e che dipende solo dalla classe di γ in $\pi_1(K, i_0)$ ossia che rimane invariato per ogni espansione o contrazione elementare di γ. E' chiaro poi che l'applicazione β così costruita sarà un omomorfismo e che verificherà le condizioni richieste nel teorema.
1. indipendenza dalla scelta dei cammini γ_i: se γ_i viene sostituito con un altro laccio $\bar{\gamma}_i$, allora $\alpha = \bar{\gamma} * \gamma^{-1}$ è un cammino chiuso in $K_{\lambda_{i-1}} \cap K_{\lambda_i}$; siccome per ipotesi l'immagine della classe di α in G rimane la stessa sia che si passi da $K_{\lambda_{i-1}}$ che da K_{λ_i}, il valore finale attribuito a γ non cambia.
2. indipendenza dalla scelta dei K_i: supponiamo di cambiare K_i con un $K_{\bar{i}}$ contenete ancora il punto iniziale di p_i. Qui utilizziamo l'ipotesi più forte che l'intersezione di tre dei K_λ è connessa: avendo dimostrato che si possono scegliere i γ_i in modo arbitrario, scegliamo γ_i che sia contenuto non solo in

$K_i \cap K_{i-1}$ ma anche in $K_{\bar{i}}$. Analogamente γ_{i+1} sarà scelto in $K_{i+1} \cap K_{i+2} \cap K_{\bar{i}}$. Che il valore attribuito a γ rimane invariato deriva come sopra dalle ipotesi fatte di commutatività tra gli omomorfismi che legano i gruppi fondamentali.
3. invarianza per omotopie di γ : se γ' è ottenuto da γ per una espansione elementare, diciamo introducendo un nuovo vertice k tra il punto uniziale i e quello finale j di un suo passo, allora il simplesso $\{i, j, k\}$ deve essere contenuto in K , e quindi apparterrà ad un K_λ che conterrà quindi anche tutti i passi $(i, j), (j, k), i, k)$. Tale sottoschema può essere scelto nella decomposizione di γ relativamente al passo (i, j) ed in quella di γ' per i passi (i, k) e (k, j); scelto poi come arco γ'_k l'arco $\gamma_i * (i, k)$, si conclude osservando che l'omotopia tra (i, j) e $(i, k) * (k, j)$ avviene entro lo spazio K_λ.

Gruppo fondamentale di un grafo
Evidentemente uno schema simpliciale è connesso se e solo due qualsiasi vertici distinti sono gli estremi iniziale e finale di un cammino chiuso e questo può essere scelto semplice. Un *albero* è un grafo connesso non vuoto e che non possegga alcun sottografo isomorfo ad un poligono di n (≥ 3) lati; Ciò equivale evidentemente a richiedere che due qualsiasi suoi punti distinti siano congiunti da uno ed un solo cammino semplice.
Si dimostrano facilmente i seguenti lemmi:

Lemma 17 *Il gruppo fondamentale di un albero è il gruppo banale*

Lemma 18 *Siano K un grafo con punto base $*$ ed $s = \{a, b\}$ un suo $1-$simplesso tale che $K' = K - \{s\}$ sia un albero. Siano α , β i cammini semplici in K' congiungenti rispettivamente $*$ con a e b con $*$. Allora $\pi_1(K, *) \simeq \mathbb{Z}$ è generato (liberamente) dal laccio chiuso $\alpha \cdot (a, b) \cdot \beta$*

Corollario 19 *Per ogni insieme S , esiste un gruppo libero su S*

Dim. Si costruisca un grafo fatto di tanti triangoli (ossia poligoni di 3 lati) quanti sono gli elementi di S e tutti con un vertice $*$ in comune. Per Van Kampen $\pi_1(K, *)$ è un gruppo libero sui generatori dei gruppi fondamentali dei triangoli costituenti K.

Corollario 20 *Per ogni insieme S ed ogni famiglia R di successioni finite in $S \times \{+1, -1\}$, esiste un gruppo con presentazione (S, R).*

Dim. Sia K lo schema simpliciale costruito nella dimostrazione del corollario precedente. Per ogni elemento $R = ((s_1, \epsilon_1), \ldots, (s_n, \epsilon_n))$ si "attacca" a K un "disco" che "introduce" la relazione R nel gruppo fondamentale ed il teorema di Van Kampen assicura che lo schema costruito ha il gruppo fondamentale presentato da $< S, R >$.
Attenzione: con "attaccare un disco lungo r" ed ottenere uno schema simpliciale occorre un "disco" con una triangolazione abbastanza fine; ad esempio sia $(i_1, \ldots, i_n)$ un cammino in K rappresentante la relazione r in $\pi_1(K, *)$ che possiamo supporre ridotta. Sia $N = 6n$ e si consideri sull'insieme $I = \mathbb{Z}/2N\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ lo schema simpliciale che ha per 2-simplessi gli $\{i, i+1, i+2\}$ e $\{2i, 2i+2, \infty\}$ per $i \in \mathbb{Z}/2N\mathbb{Z}$ assieme alle loro facce; si ha una "corona" poligonale di $3n$ lati di bordo esterno più $3n$ di bordo interno completati da un disco di centro $\{\infty\}$. Incollando il bordo esterno diviso in terne successive al grafo dato dai triangoli secondo la scrittura della relazione R, si ha lo schema voluto.

Nota Come si vede le costruzioni formali anche di cose che con un disegno si esprimono con semplicità, hanno descrizioni elementari ma lunghe e tediose. Vedremo più avanti come una enorme semplificazione si ottenga per queste costruzioni quando si lavora con CW-complessi.

Utilizzando il lemma di Zorn, si può dimostrare che ogni grafo connesso K possiede alberi massimali K_0 (ossia sottoschemi albero non propriamente contenuti in alcun altro sottoschema albero). Necessariamente un tale K_0 deve contenere tutti i vertici di K. Sia $S = K - K_0 = \{1-$simplessi di K non contenuti in $K_0\}$; per $s \in S$ sia K_s il grafo $K_0 \cup \{s\}$. Sia $*$ un vertice in K_0 che utilizzeremo come punto base; per i lemmi di sopra K_0 ha gruppo fondamentale banale e $\pi_1(K_s, *)$ è un gruppo libero di rango uno di cui scegliamo un generatore σ_s. Applicando il teorema di Van Kampen si ottiene il seguente:

Teorema 21 *$\pi_1(K, *)$ è il gruppo libero sugli elementi σ_s per $s \in S$. In particolare il gruppo fondamentale di un grafo (connesso con punto base) è un gruppo libero.*

L'insieme di generatori descritto nel precedente teorema dipende dall'albero K_0 scelto che non è certo unico. Si ha comunque il seguente:

Teorema 22 *Due sistemi di generatori liberi di uno stesso gruppo hanno la stessa cardinalità (che verrà detta rango del gruppo libero)*

Dim. Sia G un gruppo. L'insieme $H = \{x \cdot x \ : \ x \in G\}$ dei quadrati di elementi di G è un sottogruppo normale in G ed il quoziente $V = G/H$ possiede una struttura naturale di spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Se S è un sistema di generatori liberi per G, le immagini dei suoi elementi in V costituiscono una base. L'enunciato segue allora dalla asserzione che due basi di uno stesso spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità.

Teorema 23 *Se K è uno schema simpliciale finito e connesso, $\chi(K) = 1$ se e solo se K è un albero; altrimenti si ha $\chi(K) > 1$ ed il rango del gruppo fondamentale di K è $g = 1 - \chi(K)$*

Dim. Ad ogni albero di K che non contenga tutti i vertici si può aggiungere un lato che lo congiunge con un nuovo vertice, ottenendo un albero più grande (si utilizza la connessione di K); con tale operazione la caratteristica non cambia. Partendo da un vertice, che è un albero con caratteristica 1, dopo un numero finito di passi si ottiene un albero massimale: se $g \geq 0$ è il numero dei lati mancanti, si ha quindi $\chi(K) = 1-g$. Come visto avanti, un sistema di generatori libero di $\pi_1(K)$ si ottiene proprio con i lati mancanti ad un albero massimale e ciò dimostra l'asserzione sul rango.

Aggiunzione di un simplesso. Siano K uno schema ed s un suo $p-$simplesso tale che K' sia ancora uno schema simpliciale (ciò accade se e solo se s non è faccia propia di alcun altro simplesso di K) ; diremo in tal caso che K è ottenuto da K' aggiungendo un simplesso di dimensione p. Supponiamo che K' sia connesso, scegliamo un punto base $* \in K'$ e sia $\nu : \pi_1(K', *) \to \pi_1(K, *)$ l'omomorfismo indotto dall'inclusione. Si dimostra facilmente che se $p \geq 3$ allora ν è un isomorfismo. Supponiamo $p = 2$; evidentemente ν è surgettiva. Sia γ la classe in $\pi_1(K', *)$ indotta dal cammino $\alpha * \delta * \alpha^{-1}$ ove δ è un cammino chiuso che percorre il "bordo" di s ed α un laccetto in K' che unisce $*$ al punto iniziale di δ. Dimostriamo che il suo nucleo è il minimo sottogruppo normale contenente γ: infatti tutte le espansioni o contrazioni elementari tra due cammini σ, τ in K o sono fatte su $2-$simplessi che appartengono anche a K', oppure se sono fatte su s si ha che la classe di $\sigma * \tau^{-1}$ in $\pi_1(K', *)$ è coniugata a γ. Si dimostra ora facilmente la seguente:

Proposizione 24 *Il gruppo fondamentale di uno scema connesso $(K, *)$ è isomorfo a quello del suo $2-$scheletro $(K^{(2)}, *)$. Una sua presentazione si ottiene scegliendo dapprima per ogni suo vertice i un cammino (se si preferisce semplice) σ_i congiungente $*$ ad i; allora i generatori sono i simboli γ_{ij} per $\{i, j\} \in K$ da identificare alla classe del cammino $\gamma_i * (i, j) * \gamma_j^{-1}$ e le relazioni sono le $R_{ijk} = \gamma_{ij} * \gamma_{jk} * \gamma_{ki}$ per ogni $\{i, j, k\} \in K$*

Dim. Si applichi il teorema di van Kampen alla famiglia di sottoschemi seguenti: per ogni $2-$simplesso $s = \{i, j, k\} \in K$ sia K_s lo schema costituito da s le sue facce più (il supporto di) un laccetto semplice che unisce $*$ ad s.

Rivestimenti. Se $\phi : K \to K'$ è una applicazione simpliciale tra due schemi ed $i_0 \in K$, allora ϕ induce una applicazione (simpliciale) di S_{i_0} in $S_{\phi(i_0)}$ (ricordiamo che $S(i)$ indica lo star di i in K); se questa è un isomorfismo, diremo che ϕ è un *omeomorfismo locale* in i_0 o anche che ϕ è *localmente invertibile* in i_0.
Def. Una applicazione simpliciale $\phi : \tilde{K} \to K$ tra schemi simpliciali è detta un *rivestimento* se:
1. K e $\tilde{K}$ sono connessi
2. ϕ è un omeomorfismo locale in ogni punto $\tilde{i}_0 \in \tilde{K}$

Le dimostrazioni dei risultati che seguono verranno omesse se del tutto elementari.
Siano K_1, K_2 due schemi simpliciali e sia $\mathcal{C}(K_1, K_2)$ l'insieme delle applicazioni simpliciali di K_1 in K_2. Diremo che $\phi, \psi \in \mathcal{C}(K_1, K_2)$ sono *contigue* se per ogni simplesso $s \in K_1$ si ha $\phi(s) \cup \psi(s) \in K_2$. Diremo che ϕ è *omotopa* a ψ se esistono $\phi_1, \ldots, \phi_n$ in $\mathcal{C}(K_1, K_2)$ in cui $\phi_1 = \phi$, $\phi_n = \psi$ e ϕ_i è contigua a ϕ_{i+1} per $i = 1, \ldots, n-1$.

Proposizione 25 *Applicazioni simpliciali omotope inducono lo stesso omomorfismo tra i gruppi fondamentali*

Sia $\phi : K' \to K$ una applicazione simpliciale e siano c un cammino in K di origine a e a' un vertice in K' tale che $\phi(a') = a$; un cammino c' in K' di origine a' e tale che $\phi_*(c') = c$ sarà detto un *sollevamento* di c di origine a'. Nelle seguenti proposizioni, $\phi : K' \to K$ è un rivestimento fissato:

Proposizione 26 *Dati comunque un cammino c in K di origine a ed un vertice $a' \in K'$ tale che $\phi(a') = a$ esiste uno ed un solo sollevamento di c di origine a'*

Proposizione 27 *Per ogni vertice i di K l'immagine inversa $\phi^{-1}(U_i)$ è (uno schema simpliciale che è) unione disgiunta degli U_j per $j \in \phi^{-1}(i)$.*

Sia fissato un punto base su K ed uno su K' sopra di esso; è evidente il:

Proposizione 28 (Prima forma del teorema di monodromia) *Sia c' un cammino in K' e d un cammino in K ottenuto da $\phi_*(c')$ per una espansione (o contrazione) elementare. Allora il sollevamento d' di d a partire dall'origine di c' è ottenuto da c' per espansione (o contrazione) elementare In particolare l'omomorfismo $\phi_* : \pi_1(K', *) \to \pi_1(K, *)$ è iniettivo.*

Se $\phi : (K', *) \to (K, *)$ è un rivestimento, il gruppo fondamentale di $(K', *)$ può quindi essere identificato ad un sottogruppo del gruppo fondamentale di $(K, *)$ che verrà detto il *sottogruppo associato* al rivestimento; i suoi elementi sono caratterizzabili come le classi dei laccetti chiusi in K di origine $*$ il cui sollevamento che inizia dal punto base di H è chiuso.

Teorema 29 *Una applicazione $\sigma : (H, *) \to (K, *)$ tra schemi connessi con punto base si fattorizza tramite ϕ (ossia esiste una $\sigma' : (H, *) \to (K', *)$ tale che $\sigma = \phi \circ \sigma'$) se e solo se l'immagine di σ_* è contenuta in quella di ϕ_*. Tale σ' sarà detta un sollevamento di σ tramite ϕ*

Dim. Mostriamo come costruire la σ' se $Im(\sigma_*) \subset Im(\phi_*)$. Per ogni vertice i di H si scelga un cammino c da $*$ ad i e sia c' il sollevamento di $\sigma_*(c)$ che inizia dal punto base di K'. Il punto finale j di c' non dipende dal cammino c scelto: infatti sia d un altro laccio congiungente $*$ ad i in H; allora $\phi_*(d)$ è omotopo (a estremi fissi) a $\phi_*(d)\phi_*(c)^{-1}\phi_*(c)$ e quindi i loro sollevamenti terminano nello stesso punto. Siccome $\phi_*(d)\phi_*(c)^{-1}$ è in $Im(\sigma_*)$, per ipotesi esso si solleva in un cammino β in K' che inizia e finisce in $*$; ne segue che $\phi_*(d)\phi_*(c)^{-1}\phi_*(c)$ si solleva nel prodotto tra β ed il sollevamento di $\phi_*(c)$ e quindi ancora in j.

Siano $\phi_i : (K_i, *) \to (K, *)$ per $i = 1, 2$ due rivestimenti dello schema connesso $(K, *)$. Un omomorfismo $\sigma : (K_1, *) \to (K_2, *)$ è una applicazione simpliciale compatibile con le proiezioni ϕ_i nel senso che $\phi_2 \circ \sigma = \phi_1$.

Lemma 30 *L'unico omomorfismo di un rivestimento (con punto base) in se stesso è l'identità*

Dim. Siano $\phi : (K', *) \to (K, *)$ un rivestimento e $\sigma : (K', *) \to (K', *)$ tale che $\sigma \circ \phi = \phi$. Consideriamo l'insieme Ω dei vertici i per cui $\sigma(i) = i$. Esso è non vuoto perché contiene $*$; d'altra parte, essendo ϕ un omeomorfismo locale, si verifica facilmente che se Ω contiene un vertice deve contenere tutti quelli a lui contigui e quindi, essendo K' connesso, Ω conterrà tutti i vertici di K'.

Corollario 31 *Se due rivestimenti di uno schema simpliciale hanno lo stesso gruppo associato sono isomorfi*

Dim. Siano $\phi' : (K', *) \to (K, *)$ e $\phi'' : (K'', *) \to (K, *)$ due rivestimenti tali che $Im(\phi'_*) = Im(\phi''_*)$. Per il teorema 28, si hanno sollevamenti α di ϕ' tramite ϕ'' e β di ϕ'' tramite ϕ'. Dal lemma precedente si deduce che $\alpha \circ \beta$, essendo un omomorfismo di $(K'', *)$ in se, è l'identità). Analogamente $\beta \circ \alpha$ è l'identità e quindi α e β sono isomorfismi uno l'inverso dell'altro.

Mostreremo ora che ogni sottogruppo H di $\pi_1(K, *)$ è associato ad almeno un rivestimento. Costruiremo un tale rivestimento dapprima nel caso che H sia il sottogruppo banale costituito dalla sola identità nel modo seguente:
insieme dei vertici I': classi di omotopia di cammini in K che iniziano in $*$
insieme dei simplessi K': siano $\gamma_0, ..., \gamma_p$ cammini in K che iniziano da $*$ e

terminano rispettivamente in $i_0, ..., i_p$; l'insieme delle loro classi di omotopia $[\gamma_i]$ formano un simplesso di K' se e solo se $\{i_0, ..., i_p\}$ è un simplesso di K e per ogni h il cammino γ_h è omotopo al cammino γ_0 seguito dal passo (i_0, i_h)
punto base $*$: è la classe di omotopia di un cammino costante in $*$
E' ovvio che in tal modo si è ottenuto uno schema simpliciale. Definiamo ora $\phi : (K', *) \to (K, *)$ associando, per ogni cammino γ che inizia in $*$, alla classe $[\gamma] \in I'$ il punto finale di γ. E' evidente che ϕ è un rivestimento. Che $\pi_1(K', *)$ sia semplicemente connesso si ottiene facilmente osservando che se cammino chiuso γ in K che inizia in $*$ si rileva in un cammino chiuso in K' allora γ deve essere omotopo a zero.
Un rivestimento $\phi : (K', *) \to (K, *)$ in cui K' è semplicemente connesso è detto un *rivestimento universale*; la costruzione precedente dimostra che un tale rivestimento esiste per ogni schema connesso $(K, *)$.
Nel caso di H qualsiasi, si modifica la costruzione precedente così :
chiamiamo equivalenti ($mod\ H$) due cammini α , β in K di origine $*$ se esiste un cammino chiuso σ in $(K, *)$ la cui classe stà in H e tale che α sia omotopo al prodotto $\sigma * \beta$; le classi di equivalenza di tale relazione danno il nuovo insieme di vertici. I simplessi verranno definiti come sopra, con l'unica variazione che i cammini γ_h e $\gamma_0 * (i_0, i_1)$ saranno richiesti essere equivalenti ($mod\ H$).
Si ottiene così un rivestimento $\phi : (K', *) \to (K, *)$ in cui due cammini in K di origine $*$ hanno rilevamenti in K' inizianti in $*$ che terminano nello stesso punto se e solo se essi sono equivalenti ($mod\ H$). Ne segue che l'immagine per ϕ_* di $\pi_1(K', *)$ è il sottogruppo H e che la fibra $\phi^{-1}(*)$ è identificabile alle classi laterali (sinistre) di H in $\pi_1(K, *)$; in particolare la sua cardinalità (il "numero dei fogli del rivestimento) coincide con l'indice di H in $\pi_1(K, *)$.
Quel che abbiamo dimostrato può essere riassunto dicendo che le classi di isomorfismo di rivestimenti d'uno schema connesso $(K, *)$ sono in corrispondenza biunivoca con i sottogruppi di $\pi_1(K, *)$.

Il rivestimento indotto dall' azione di un gruppo
Sia $Aut(K)$ il gruppo degli automorfismi simpliciali di uno schema K (le sue simmetrie); un suo sottogruppo G è detto *privo di punti fissi* se per ogni simplesso s in K, l'unico $g \in G$ per cui $g(s) = s$ è l'identità. Diremo invece che G è *propiamente discontinuo* se per ogni simplesso s di K, l'unico $g \in G$ per cui $g(s) \cap s$ è non vuoto è l'identità. E' chiaro che $Aut(K)$ è in modo naturale un sottogruppo del gruppo degli automorfismi della suddivisione baricentrica $K^{(1)}$ di K. Si verifica facilmente che se G è privo di punti fissi su K esso diviene propiamente discontinuo se fatto agire sulla sua seconda suddivisione baricentrica $K^{(2)}$.
Sia quindi G un gruppo propiamente discontinuo su K. Si ottiene si ottiene uno schema simpliciale su $I' = I/G$ prendendo come simplessi le immagini di simplessi di K per la proiezione $I \to I'$ e si ha anche un morfismo simpliciale $\phi : K \to K'$; se K è connesso tale ϕ è un rivestimento. Un rivestimento così ottenuto è detto *normale*.

Proposizione 32 *Un rivestimento $\phi : (\tilde{K}, *) \to (K, *)$ è (isomorfo ad uno) normale se e solo se il suo sottogruppo associato in $\pi_1(K, *)$ è un sottogruppo invariante*

Dim. Sia $\phi : K \to K'$ un rivestimento normale indotto da una azione del gruppo

G su K; scelti punti base $*$ in K e K' tali che $\phi(*) = *$, sia H l'immagine in $\pi_1(K', *)$ del gruppo fondamentale di $(K, *)$; i suoi elementi sono caratterizzabili come le classi di cammini chiusi h in K che iniziano in $*$ ed il cui sollevamento $\bar{h}$ in K che parte da $*$ è chiuso. Se i è un qualsiasi vertice in $\phi^{-1}(*)$, esiste $g \in G$ tale che $g(*) = i$; allora $g_*(\bar{h})$ è un cammino chiuso in K che solleva h e che inizia in i. Di conseguenza il cammino $g * h * g^{-1}$ ha un sollevamento chiuso in K che inizia in $*$ ed appartiene quindi ad H.
Viceversa supponiamo che $\phi : (K, *) \to (K', *)$ sia un rivestimento il cui gruppo associato H è normale. Costruiremo ora una azione del quoziente G del gruppo $\pi_1(K', *)$ per H, che agisce in modo propiamente discontinuo su K ed il cui rivestimento associato è isomorfo a quello dato. Sia fissato un cammino chiuso γ in K' di origine $*$. Per ogni vertice i di K scegliamo un cammino α che lo congiunga al punto base e sia $\bar{\alpha}$ la sua immagine in K' tramite ϕ che sarà un cammino che congiunge $\phi(i)$ al punto base di K'. Solleviamo adesso $\bar{\alpha} * \gamma * \bar{\alpha}^{-1}$ a partire da i ed indichiamo $\gamma(i)$ il punto di arrivo di quest'ultimo: ciò ha senso perché tale punto non dipende dal cammino α scelto; infatti se β è un altra scelta di cammino in K da i a $*$, il cammino $\bar{\alpha}^{-1} * \beta$ induce un elemento di H come pure $\gamma * \bar{\alpha}^{-1} * \gamma^{-1}$ perché H è normale. Quindi anche il sollevamento di $\bar{\alpha} * \gamma * \bar{\alpha}^{-1} * \bar{\beta} * \gamma^{-1} * \bar{\beta}^{-1}$ ha un sollevamento chiuso a partire da i che dimostra quanto volevamo.

Come esempio di ciò costruiamo alcune 3-varietà interessanti. Siano X_1, X_2 due copie del poligono chiuso di n lati. Allora il join (vedi: "costruzione di schemi" in appendice) $X = X_1 * X_2$ è una varietà ("una" sfera di dimensione 3, come si può verificare considerando il bordo del prodotto di due dischi poligonali di n lati) ed una azione di $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ su esso è generata dall'automorfismo $(i, j) \mapsto (i+1, j+p)$. Essa è senza simplessi fissi e quindi, dopo due suddivisioni baricentriche, si ottiene un rivestimento normale $\phi : X^{(2)} \to L(n, p)$; la varietà $L(n, p)$ è detta *spazio lenticolare* di tipo (n, p).

Una applicazione alla teoria dei gruppi I metodi combinatori possono essere utilizzati anche in questioni puramente algebriche. Ad esempio il teorema di van Kampen per gruppi fondamentali di poliedri (molto più facile di quello topologico) mostra che il gruppo fondamentale di un grafo connesso è il gruppo libero sui lati mancanti di un albero massimale. Ciò dimostra intanto che i gruppi liberi esistono; inoltre considerando i rivestimenti, si deduce che ogni sottogruppo di un gruppo libero è libero; anzi si trova facilmente la seguente (strana?) formula: un gruppo che ha indice finito d in un gruppo libero su n elementi è un gruppo libero su $1 + dn - d$ elementi.
Descriviamo anche un'altra tale applicazione alla teoria dei gruppi.
Notazioni: siano G un gruppo ed x un suo elemento; indicheremo con $|G|$ e $|x|$ rispettivamente le cardinalità di G e del sottogrupo generato da x.

Proposizione 33 *Siano x, y elementi di un gruppo finito G. Allora:*

$$|G|(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|xy|} - 1)$$

è un intero pari

Dim. Sarà sufficiente considerare il caso in cui x, y generino G. Sia $X = S^2 - \{0, 1, \infty\}$. Si ha $\pi_1(X) \simeq F(2)$ = gruppo libero in due generatori α, β rappresentati da curve semplici in $\mathbb{R}^2$ aventi al loro interno una 0 e l'altra 1. Sia $\phi : \pi_1(X) \to G$ l'omomorfismo definito da $\phi(\alpha) = x$ e $\phi(\beta) = y$ e sia H il suo nucleo. Esso definisce un rivestimento $\tilde{X}$ di X avente $|G|$ fogli; tale $\tilde{X}$ sarà ottenuto eliminando un numero finito di punti da una superficie compatta Y: infatti $\tilde{X}$ può essere resa una superficie compatta aggiungendo dei punti sopra $0, 1, \infty$ come si vede utilizzando la classificazione dei rivestimenti finiti di S^1. Si verifica anche che ogni punto aggiunto sopra 0 ha "ramificazione" di molteplicità $|x|$ ossia l'estenzione di ϕ è del tipo $z \mapsto z^{|x|}$; analogamente quelli sopra 1 ed ∞ hanno ramificazioni $|y|$ ed $|xy|$. Comparando il numero di simplessi di Y ed X con l'ausilio dell'estenzione di ϕ (processo che viene detto "formula du Hurwitz") si trova:

$$\chi(Y) = |G| \cdot \chi(S^2) - \frac{|G|}{|x|}(|x| - 1) - \frac{|G|}{|y|}(|y| - 1) - \frac{|G|}{|xy|}(|xy| - 1)$$

da cui:

$$\chi(Y) = |G| \cdot (\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|xy|} - 1)$$

che è pari perché Y è una superficie orientabile.

Simmetrie di superficie Un *automorfismo* di uno schema simpliciale (I, K) è una applicazione biunivoca $\phi : I \to I$ tale che $\phi(s) \in K$ per ogni $s \in K$. Gli automorfismi, detti anche *simmetrie*, costituiscono un gruppo che indichiamo con $Aut(K)$. Mostreremo che se X è una superficie orientata di caratteristica negativa, allora non solo $AutX$ è finito (il che è ovvio perchè lo schema lo è) ma esso non può avere ordine maggiore di una costante che dipende solo da $\chi(X)$. Al contrario se $\chi = 0$ o 1 , si costruiscono facilmente superficie aventi tale caratteristica ed il cui gruppo di simmetria è di ordine arbitrariamente alto. Consideriamo in generale una superficie orientata X e sia G il sottogruppo di $Aut(X)$ costituito dalle simmetrie orientate; esso coincide con $Aut(X)$ o ha indice due in esso. Suddividendo eventualmente la triangolazione di X si può fare in modo che il quoziente Y di X per l'azione di G abbia una struttura di superficie poliedrale di modo che la proiezione $\phi : X \to Y$ sia un rivestimento ramificato, ossia localmente scrivibile in coordinate locali come $z \mapsto z^p$. Precisamente se $x \in X$ tale p è l'ordine del gruppo di isotropia di x ossia dell'insieme dei $\phi \in Aut(X)$ tali che $\phi(x) = x$. Se $x, x' \in X$ hanno la stessa immagine in Y allora i loro gruppi di isotropia sono coniugati e quindi hanno lo stesso ordine. Così su un valore non regolare y_i si avranno n/p_i punti tutti di indice di ramificazione p_i, ove n è l'ordine di G. Se vi sono s tali valori non regolari e $p_1, ..., p_s$ sono gli indici corrispondenti, facendo la comparazione tra i simplessi di X e di Y (ossia la formula di Hurwitz) e dette $2 - 2g$ e $2 - 2g'$ le loro caratteristiche si trova:

$$\frac{2g - 2}{n} = 2g' - 2 + \sum_1^s (1 - \frac{1}{p_i})$$

Se $\chi(X) < 0$, il membro a sinistra è positivo e quindi anche quello a destra. Essendo $g' \geq 0$, $s \geq 0$ ed ogni $p_i \geq 2$, si trova che tale espressione se positiva deve essere almeno $1/42$. Ne segue che l'ordine n di G è al più $42\chi(X)$ e quindi l'ordine di $Aut(X)$ è al più $84\chi(X)$.