Richiami di calcolo differenziale locale

In quel che segue "spazio vettoriale" significherà "spazio vettoriale reale di dimensione finita". In ogni tale spazio verrà utilizzata una norma scelta comunque tra quelle esistenti : tutto quanto verrà discusso non dipenderà dalla particolare norma utilizzata.

Gran parte dei risultati richiamati in questo paragrafo rimangono validi anche per per spazi vettoriali reali di dimensione infinita su cui sia stata fissata una norma rispetto alla quale essi siano completi: tali spazi vengono chiamati spazi di Banach. Essi saranno studiati nel corso di Istituzioni di Analisi Superiore; diversi esempi saranno introdotti più avanti anche in questo corso: un esempio tipico sarà dato dalla norma del sup sullo spazio vettoriale delle funzioni continue a valori reali definite su uno spazio compatto. Per l'estensione del calcolo locale agli spazi di Banach bisogna richiedere esplicitamente alcuni fatti che sono automaticamente verificati in dimensione finita; precisamente ogni applicazione lineare $\phi : E \to F$ deve essere supposta continua e talvolta, come per i teoremi di inversione locale, si deve supporre che il suo nucleo abbia supplementare chiuso, che la sua immagine sia chiusa e sia dotata anch'essa di supplementare chiuso.

Siano V, W spazi vettoriali, $\Omega \subset V$ un aperto, $x_0 \in V$ e $f : \Omega \to W$ una applicazione. Ricordiamo che f è detta *differenziabile* in x_0 se esiste $L : V \to W$ lineare tale che posto per $h \in V$ con $x_0 + h \in \Omega$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L[h] + R(h)$$

si abbia

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{||h||} = 0$$

Si dimostra che di tali L ne esiste al più uno; se esiste esso viene detto il *differenziale* di f in x_0 ed è indicato con $df(x_0)$ (Si noti l'uso di parentesi tonde e quadre: in $df(x_0)[h]$, x_0 è il punto in cui si "differenzia" ed è indicato entro parentesi tonde; in parentesi quadre indichiamo invece gli "incrementi", in questo caso h, in cui il differenziale è calcolato).

Se f è differenziabile in ogni punto di Ω, si ha una applicazione

$$df : \Omega \to \mathcal{L}(V, W) = Hom_{\mathbb{R}}(V, W)$$

Se tale applicazione è continua diremo che f è di classe C^1 su Ω.
Induttivamente, per k intero ≥ 2, diremo che f è di classe C^k se è C^1 e df è C^{k-1}; diremo che f è C^∞ se essa è C^k per ogni $k \in \mathbb{N}$.
D'ora in poi il termine "differenziabile" significherà di classe C^∞.

Teorema 1 (di inversione locale) *Siano E, F spazi vettoriali, Ω un aperto in V, $f : \Omega \to F$ differenziabile ed $x \in \Omega$.*
Se $df(x) : E \to F$ è un isomorfismo, allora esiste un aperto $U \subset E$ contenente x , tale che :
a. $V = f(U)$ è aperto in F
b. $f : U \to V$ è biunivoca con inversa differenziabile.

La dimostrazione sarà supposta nota (corso di Analisi 2).

Def. Siano $U \subset E$ e $V \subset F$ aperti in spazi vettoriali. Una applicazione $f : U \to V$ è detta un *diffeomorfismo* se è biunivoca insieme alla sua inversa. Nelle notazioni ed ipotesi del teorema pecedente diremo che f è un *diffeomorfismo locale* in $x \in \Omega$ od anche che essa è *localmente invertibile*

Un diffeomorfismo sarà talvolta chiamato anche *cambiamento di coordinate.*

Corollari del teorema di inversione locale

Siano E, F spazi vettoriali, $\Omega \subset E$ un aperto, $f : \Omega \to F$ una applicazione differenziabile e sia $0 \in \Omega$, $f(0) = 0$.

a. supponiamo che $df(0) : E \to F$ sia surgettiva.
Sia $p : E \to K = ker(df(0))$ una proiezione (associata alla scelta di un supplementare di K in E). Allora l'applicazione $g : \Omega \to F \oplus H$ definita da $g(x) = (f(x), p(x))$, è localmente invertibile in 0. Essa rappresenta quindi un cambiamento di coordinate in un intorno di 0; in tali coordinate la f diviene lineare (precisamente la proiezione sul fattore F).

b. supponiamo che $df(x_0) : E \to F$ sia iniettiva.
Sia H un supplementare in F dell'immagine di $df(x_0)$. Allora l'applicazione $g : E \oplus H \to F$ definita da $g(x, h) = f(x) + h$ è localmente invertibile in 0. Essa definisce quindi un cambiamento di coordinate nell'origine di F; in tali coordinate la f diviene lineare (precisamente l'inclusione di E in $E \oplus H$).

Integrali contenenti un parametro

Siano E uno spazio vettoriale e $f : [a, b] \to E$ continua. Esiste un unico $I \in E$ detto *integrale di f su $[a, b]$* (e che verrà indicato con $\int_a^b f(t)dt$) tale che per ogni $\epsilon > 0$, esista $\delta > 0$ tale che per ogni successione $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ con $\mid x_{i-1}, x_i \mid \leq \delta$ per $i = 1, \ldots n$, sia

$$\mid \sum_1^n f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) - I \mid < \epsilon$$

Se $b < a$ definiamo $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

Proposizione 2 *$f \to \int_a^b f(t)dt$ è una applicazione lineare continua di $C^0([a, b])$ in $\mathbb{R}$ la cui norma è $|b - a|$ (ossia $\| \int_a^b f(t)dt\| \leq |(b - a)| \cdot sup_{x \in [a,b]} \|f(x)\|$)*

Siano E, F spazi vettoriali, $\Omega \subset E$ un aperto, T uno spazio topologico. Le applicazioni $f : \Omega \times T \to F$ possono essere pensate come famiglie di applicazioni da Ω in F parametrizzate da T. Useremo in tal caso la notazione $f(x, t) = f_t(x)$ per $(x, t) \in \Omega \times T$. La notazione $df_t(x)$ indicherà quindi il differenziale della funzione $f_t : \Omega \to F$ nel punto $x \in \Omega$.

Def. $C^1_T(\Omega, F)$ è l'insieme delle $f : \Omega \times T \to F$ che sono continue, tali che per ogni $t \in T, f_t : \Omega \to F$ sia differenziabile e tali che $df_t : \Omega \times T \to \mathcal{L}(E, F)$ sia continua. Analogamente si definiscono le $C^k_T(\Omega, F)$ per $k \geq 2$ o $k = \infty$.

Teorema 3 *Siano $a < b$ e $f \in C^1_{[a,b]}(\Omega, F)$. Allora la funzione $g : \Omega \to F$ definita da $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ è di classe C^1 ed il suo differenziale è $dg = \int_a^b df(x,t)dt$ (l'integrale al secondo membro è fatto in $\mathcal{L}(E, F)$).*

Corollario 4 *Se nel teorema precedente si suppone $f \in C^k_{[a,b]}(\Omega, F), k \geq 1$ allora $g \in C^k(\Omega, F)$.*

dim. del teorema

Continuità di g : siano $x_0 \in \Omega$ e $\epsilon > 0$. Vogliamo trovare un intorno U di x_0 in Ω tale che per $x \in U$ sia $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$. Essendo f continua su $\Omega \times [a, b]$,per ogni $t \in [a, b]$ esiste un intorno A_t di (x_0, t) in $\Omega \times [a, b]$ tale che per $(y, s) \in A_t$ sia $|f(y, s) - f(x_0, t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Ora tale intorno può supporsi del tipo $U_t \times I_t$ con U_t, I_t aperti negli spazi Ω e $[a, b]$. Per compattezza di $[a, b]$, esistono $t_1, \cdots, t_r$ tali che $I_1 \cup \cdots \cup I_r = [a, b]$. Allora per $x \in U = U_{t_1} \cap \cdots \cap U_{t_r}$ e qualsiasi $t \in [a, b]$ si ha :

$$|g(x) - g(x_o)| = \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t) < (b-a) \cdot \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon.$$

Differenziabilità di g : bisogna mostrare che g è differenziabile nel punto $x_0 \in \ \Omega$ e che il suo differenziale è $\int_a^b df(x_0, t)dt$. Ciò significa che :

$$\lim_{\substack{x_0+h\in\Omega \\ h\to 0}} \frac{\int_a^b (f(x_0+h,t) - f(x_0,t))dt - (\int_a^b df_t(x_0)dt)[h]}{||h||} = 0$$

Ora si ha :

$$(\int_a^b df_t(x_0)dt)[h] = \int_a^b df_t(x_0)[h]dt$$

(si noti che l'integrale nel membro di sinistra è fatto in $\mathcal{L}(E, F)$ mentre quello a destra è fatto in F)

Quindi si deve mostrare che va a zero l'integrale

$$\int_a^b (\frac{f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - df_t(x_0)[h]}{||h||})$$

Consideriamo la funzione $\sigma : [0, 1] \to U$ definita da $\sigma(t) = x_0 + th$. Allora (teorema di Torricelli) si ha :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f \circ \sigma(1) - f \circ \sigma(0) = \int_0^1 d(f \circ \sigma) =$$

$$= \int_0^1 df_t(x_0+sh) \cdot \sigma'(s)ds = \int_0^1 df_t(x_0+sh)[h]ds$$

Sostituendo nell'espressione precedente ci si riduce a mostrare che va a zero l'espressione:

$$\frac{1}{||h||} \int_a^b (\int_0^1 (df_t(x_0+sh) - df_t(x_0))ds)dt[h]$$

Essendo $df_t(x)$ continua su $\Omega \times [a,b]$, lo stesso ragionamento utilizzato per mostrare la continuità di g , mostra che la norma di $df_t(x_0+sh) - df_t(x_0)$ è maggiorata da una qualsiasi prefissata costante positiva per h in qualche intorno dell'origine e da ciò segue facilmente che tutto l'integrale va a zero.

Teorema di divisione elementare

Siano E, F spazi vettoriali ; un aperto Ω in $E \times F$ è detto *stellato* rispetto ad E se per ogni $(x_0, y_0) \in \Omega$, tutto il segmento $[(x_0,0),(x_0,y_0)]$ è contenuto in Ω.

Teorema 5 (divisione elementare) *Siano $\Omega \subset E \times F$ un aperto stellato rispetto a E ed $f : \Omega \to G$ una applicazione differenziabile nulla su $\Omega \cap E \times \{0\}$; (ossia tale che $f(x_0, 0) = 0$ per ogni $(x_0, 0) \in \Omega$). Esiste allora una applicazione differenziabile $g : \Omega \to \mathcal{L}(F, G)$ tale che per $(x, y) \in \Omega$ sia $f(x,y) = g(x,y)[y]$*

dim. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ fissato. Consideriamo la funzione $\tilde{f} : [0,1] \to G$ definita da $\tilde{f}(t) = f(x_0, ty_0)$. Per il teorema di Torricelli, si ha:

$$f(x_0,y_0) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \int_0^1 d\tilde{f} = \int_0^1 (df_x(x_0,ty_0)[y_0]) =$$

$$= (\int_0^1 df_x(x_0,ty_0))[y_0] = g(x_0,y_0)[y_0]$$

ove df_x dipende differenziabilmente da x_o, y_0, t; i risultati del paragrafo precedente assicurano quindi che g è differenziabile.

Applicazioni polinomiali

Siano E, F spazi vettoriali. Una applicazione $\phi : E \to F$ è detta un *polinomio omogeneo di grado* p se esiste una $b : E^p \to F$ $p-$lineare tale che per ogni $x \in E$ sia $\phi(x) = b(x, \cdots, x)$. Diremo che ϕ è la *contrazione* di b. Si verifica facilmente (facendo una media su permutazioni delle variabili) che se ϕ è un tale polinomio, fra tutte le $p-$lineari di cui esso è contrazione, ve ne è esattamente una che sia simmetrica : essa verrà detta la *polarizzazione* di ϕ

Ne segue che $\mathcal{L}_p(E, F)$ ={polinomi omogenei di grado p da E a F } è uno spazio vettoriale (è in corrispondenza biunivoca con le applicazioni $p-$lineari simmetriche da E ad F).

Una applicazione $\phi : E \to F$ è detta un *polinomio di grado* $\leq n$ se $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \cdots + \phi_p$ ove $\phi_i : E \to F$ è un polinimio omogeneo di grado p.

Se Ω è un aperto in $E \times F$ e $g : \Omega \to \mathcal{L}_p(F, G)$ è differenziabile, allora $(x, y) \to g(x, y)[y]$ (che è ovviamente differenziabile) sarà detta un *polinomio omogeneo di grado* p in y a coefficienti funzioni $\mathcal{C}^\infty$ su Ω.

Sviluppi di Taylor

Siano Ω un aperto in $E \times F$ stellato rispetto ad E, $\Omega_0 = \Omega \cap E \times \{0\}$ e sia $f : \Omega \to G$ differenziabile. Allora $f(x, y) - f(x, o) : \Omega \to G$ è nulla su Ω_0 ; quindi per il teorema precedente, esiste $R_0 : \Omega \to \mathcal{L}_1(F, G)$ tale che $f(x, y) - f(x, 0) = R_0(x, y)[y]$. Posto $f(x, 0) = \phi_0(x)$ questa relazione si scrive:

(1) $\qquad f(x, y) = \phi_0(x) + R_0(x, y)[y]$

che verrà chiamata *sviluppo di Taylor d'ordine* 0 di f rispetto a y. Sviluppando d'ordine zero R_0, si ottiene una relazione del tipo $R_0(x, y) = \phi_1(x, y) + R_0(x, y)[y]$ ove $\phi_1 : \Omega_0 \to \mathcal{L}_1(F, G), \tilde{R}_0 : \Omega \to \mathcal{L}_1(F, \mathcal{L}_1(F, G))$. Quindi $\tilde{R}_0$ associa ad ogni punto (x_0, y_0) di Ω, una applicazione bilineare su F a valori in G la cui contrazione è un polinomio omogeneo di grado due da F a G che indicheremo con $R_1(x, y)$. sostituendo nella (1) si ottiene ;

$$f(x, y) = \phi_0(x) + \phi_1(x)[y] + (R_1(x, y)[y]$$

che è lo *sviluppo di Taylor d'ordine* 1: dice che f è un polinomio di grado uno in y a coefficienti $\mathcal{C}^\infty$ in x più un *resto* che è un polinomio omogeneo di grado due in y a coefficienti funzioni $\mathcal{C}^\infty$ in x, y.

Proseguendo così si ottiene il seguente :

Teorema 6 (Sviluppo di Taylor) *Se Ω e f sono come sopra, esistono applicazioni differenziabili $\phi_p : \Omega_0 \to \mathcal{L}_p(F, G)$ e $R_p : \Omega \to \mathcal{L}_p(F, G)$ per $p \in \mathbb{N}$ tali che per $n \in \mathbb{N}$ sia :*

$$(2) \qquad f(x, y) = \sum_{h=0}^{n} \phi_h(x)[y] + R_{n+1}(x, y)[y].$$

Nota. Derivando successivamente ambo i membri di (2) e calcolando per $y = 0$ si ottiene che $\phi_p(x) = \frac{1}{p!} d^p f_x(0)$ (attenzione alle notazioni che possono trarre in inganno: si ricordi che $f_x(y)$ è per definizione $f(x, y)$). Ne segue che le ϕ_h in (2) sono univocamente determinate. Per quanto riguarda i resti $R_{n+1}(x, y)[y]$, essi non sono univocamente determinati dalle richieste fatte (lo sarebbero se si chiedesse una proprietà supplettiva che qui non esplicitiamo perchè non avremo necessità di avvalercene). Ciò accade perché un polinomio omogeneo a coefficienti C^∞ non (formalmente) nullo può rappresentare la funzione identicamente nulla, a differenza di quel che accade per polinomi a coefficienti costanti (ad esempio $h_1(x_1,x_2)x_1 + h_2(x_1,x_2)x_2$ ove $h_1(x_1,x_2) = x_2$ e $h_2(x_1,x_2) = -x_1$).

Quel che spesso è sufficiente sapere dei resti R_n è precisato dalla seguente:

Proposizione 7 *Se Ω, f sono come sopra, ogni $(x_0, 0) \in \Omega$ ha un intorno aperto $U = A \times B \subset \Omega$, con A, B aperti in E, F, tale che*

$$\lim_{y\to 0} \frac{R_{n+1}(x,y)[y]}{\|y\|^n} = 0 \textit{ uniformemente per } x \in A.$$

dim. Siano infatti U un aperto in Ω ed M un numero reale tali che $\|R_{n+1}(x,y)\| \leq M$ per $(x,y) \in U$. Allora, essendo R_{n+1} un polinomio omogeneo di grado $n+1$, si ha che:

$$\frac{R_{n+1}(x,y)[y]}{\|y\|^n} = \|y\| R_{n+1}(x,y)[\frac{y}{\|y\|}]$$

avrà norma $\leq \|y\|M$.

Scritture in termini di coordinate

Se $x_1, \ldots, x_n$ sono le coordinate su $E = \mathbb{R}^n$, un polinomio omogeneo $\phi : E \to \mathbb{R}$ di grado d si scrive ordinariamente nel seguente modo:

$$\phi(x) = \sum_{|I|=d} a_I \cdot x^I$$

ove per le usuali convenzioni di multiindici: se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, si pone $|I| = i_1 + \cdots + i_n$ e $x^I = x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$.

Nello sviluppo di Taylor di una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si ha una somma di tali polinomi omogenei più un ultimo termine R_{n+1}, il "resto", che è ancora espresso da una scrittura dello stesso tipo con la sola differenza che i "coefficienti" a_I invece che costanti sono funzioni differenziabili:

$$R_{n+1} = \sum_{|I|=d} a_I(x) \cdot x^I$$

Utilizzo del linguaggio algebrico

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; l'insieme delle funzioni differenziabili $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dotato delle ovvie operazioni di somma e prodotto costituisce un anello commutativo che indicheremo con $\mathcal{E}(\Omega)$. Per $x_0 \in \Omega$ si ha un omomorfismo

$$\mathcal{E}(\Omega) \ni f \overset{\sigma}{\mapsto} f(x_0) \in \mathbb{R}$$

il cui nucleo è un ideale massimale che indicheremo con $\mathfrak{m}_{x_0}(\Omega)$.

Si ha quindi una successione esatta :

$$0 \to \mathfrak{m}_{x_0}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega) \overset{\sigma}{\to} \mathbb{R} \to 0$$

la quale *spezza* ossia esiste un omomorfismo $j : \mathbb{R} \to \mathcal{E}(\Omega)$ tale che $\sigma \circ j = id_{\mathbb{R}}$: quello che associa allo scalare λ la funzione che vale λ su tutto Ω.

Per semplicità di notazioni supponiamo $x_0 = 0$. Per il teorema di divisione elementare sappiamo che se Ω è stellato in 0 allora l'ideale $\mathfrak{m}_0(\Omega)$ è generato dalle funzioni $x_1, \ldots, x_n$; da ciò si deducono formalmente gli sviluppi di Taylor di ordine finito per ogni elemento in $\mathcal{E}(\Omega)$.

Si esamini per esercizio se ciò rimane valido anche nel caso che Ω non sia stellato in 0.

Il linguaggio dei germi

Consideriamo la totalità delle coppie (U, f) ove $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto contenente l'origine ed $f : U \to \mathbb{R}$ è differenziabile; due tali coppie $(U, f), (U', f')$ saranno dette equivalenti se esiste un altro aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ contenente l'origine e tale che $V \subset U \cap U'$ e $f_{|V} = f'_{|V}$. Le classi di equivalenza saranno dette *germi di funzioni differenziabili* all'origine in $\mathbb{R}^n$ e l'insieme da esse costituito verrà indicato con $\mathcal{E}(n)$. E' chiaro che la somma e il prodotto di funzioni inducono operazioni su $\mathcal{E}(n)$ con le quali esso diviene un anello commutativo. Si ha ancora una successione esatta che spezza:

$$o \to \mathfrak{m}(n) \to \mathcal{E}(n) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R} \to 0$$

ove σ associa alla classe di equivalenza di (U, f) il valore di f in 0 e conseguentemente $\mathfrak{m}(n)$ è l'ideale dei germi "nulli" in 0. Ogni sistema di coordinate all'intorno dell'origine in $\mathbb{R}^n$ fornisce un sistema finito di generatori per $\mathfrak{m}(n)$. Si dimostri per esercizio che inversamente ogni sistema di generatori per $\mathfrak{m}(n)$ contiene un sistema di coordinate locali per qualche intorno dell'origine di $\mathbb{R}^n$.

Risultati ottenuti con metodi elementari

Siano $\mathcal{E} = \mathcal{E}(n)$ l'insieme dei germi di funzioni differenziabili in 0 di R^n e $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(n)$ il suo ideale massimale.

Per $f \in \mathcal{E}$, indicheremo con $J = J(f)$ l'ideale generato in $\mathcal{E}$ dalle $\partial f / \partial x_i$ per $i = 1, \ldots, n$: esso sarà detto *ideale iacobiano* di f.

Nota. Apparentemente l'ideale iacobiano di f dipende dalle coordinate utilizzare per calcolare le derivate; ma è facile dimostrare che con un altro sistema di coordinate, si ottiene lo stesso ideale (anche se ovviamente le nuove derivate saranno in generale diverse: esse forniranno un nuovo sistema di generatori di tale ideale).

Diremo che f è *singolare* se $J \neq \mathcal{E}$ ossia J è propriamente contenuto in $\mathcal{E}$; diremo che f ha una *singolarità isolata* se è singolare ed esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $J \supset \mathfrak{m}^k$. Due germi $f_0, f_1 \in \mathcal{E}$ sono detti *equivalenti* se esiste un (germe di) diffeomorfismo ψ di $(\mathbb{R}^n, 0)$ in se tale che $f_1 = f_0 \circ \psi$. Una f singolare è detta di *determinazione finita* se esiste un intero naturale p tale che ogni g differenziabile che ha lo stesso sviluppo di Taylor d'ordine p di f , è equivalente ad f. In tal caso diremo anche che f è $p-$determinata.

Teorema 8 *Siano $f, g \in \mathcal{E}$ con f singolare e $g \in J(f)^2\mathfrak{m}$. Allora f è equivalente a $f + g$.*

Corollario 9 *Ogni singolarità isolata è di determinazione finita. Più precisamente se $f \in \mathcal{E}$ è tale che $J(f) \supset \mathfrak{m}^2$ allora f è $2k-$determinata.*

Dim. (del corollario) Nelle ipotesi fatte sia $\tilde{f} = f + g$ con $g \in \mathfrak{m}^{2k+1}$. Essendo $J(f) \supset \mathfrak{m}^k$ si ha $J(f)^2 \supset \mathfrak{m}^{2k}$ e quindi $g \in \mathfrak{m}^{2k+1} \subset J(f)^2\mathfrak{m}$ e si applica il teorema precedente.

Prima di dimostrare il teorema, facciamo vedere come se ne può dedurre facilmente il lemma di Morse.
Premettiamo il seguente :

Lemma 10 *Sia $f \in \mathcal{E}$ singolare. Allora $det(\partial^2 f(0)/\partial x_i \partial x_j) \neq 0$ se e solo se $J(f) = \mathfrak{m}$.*

(In tal caso f è detta *di Morse* o *non degenere*)
Dim. Sia $det(\partial^2 f(0)/\partial x_i \partial x_j) \neq 0$; allora l'applicazione $(x_1, \ldots, x_n) \to (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ di $(\mathbb{R}^n, 0)$ in se è localmente invertibile. Quindi esistono funzioni differenziabili $F_1, \ldots, F_n$ nulle in 0 e tali che $x_i = F_i(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ per $i = 1, \ldots, n$. Essendo $F_i(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^n G_{ij} y_j$ (sviluppo di Taylor) si ottiene $x_i = \sum_{j=1}^n G_{ij} y_j$ e quindi $\mathfrak{m} \subset J(f)$; l'inclusione $J(f) \subset \mathfrak{m}$ è assicurata dal fatto che f è singolare.

Viceversa se $J(f) = \mathfrak{m}$, allora si ha $x_i = \sum_{j=1}^n G_{ih} \partial f/\partial x_h$. Derivando rispetto a x_j e calcolando per $x = 0$ si ha $\delta_{ij} = \sum_{h=1}^n G_{ih}(0) \partial^2 f(0)/\partial x_h \partial x_j$ il che mostra l'invertibilità di $\partial^2 f(0)/\partial x_i \partial x_j$.

Da questo lemma e dal precedente corollario si ottiene il seguente:

Corollario 11 *Se f è di Morse e $g \in \mathfrak{m}^3$, allora f è equivalente a $f + g$. In particolare f è equivalente al proprio sviluppo di Taylor d'ordine due.*

Dim. (del teorema) Sia U un aperto contenente $0 \in \mathbb{R}^n$ su cui f e g sono definite e si consideri la funzione $f(x) + tg(x)$ definita su $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, restringendo tale funzione a $t = t_0$, si ottiene un germe di funzione $f(x) + t_0 g(x)$ in $0 \in \mathbb{R}^n$ che indicheremo con f_{t_0}. Mostreremo che per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, f_{t_0} è equivalente a tutte le f_t con t sufficientemente vicino a t_0 . Ne seguirà che tutte le f_t sono equivalenti tra loro .

Esaminiamo dapprima il caso $t_0 = 0$
Consideriamo un (germe di) campo di vettori all'origine di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ del tipo $(X(x,t), 1)$ con $X(0,t) = 0$; seguendo le linee integrali di tale campo otteniamo un germe $\psi_t : (\mathbb{R}^n, 0) \times \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^n, 0)$ definito da : $\psi_t(x) =$ posizione al tempo t partendo per $t = 0$ da $(x, 0)$ e per t piccolo ψ_t è un cambiamento di coordinate locali all'origine di $\mathbb{R}^n$. Cercheremo di costruire $X(x,t)$ in modo che le ψ_t trasformino le $f + tg$ nella f; ciò equivale a richiedere che la funzione $(f + tg) \circ \psi_t$ non dipenda da t, o in altri termini che $\dfrac{\partial}{\partial t}((f + tg) \circ \psi_t) = 0$ che si scrive:

$$< \bigtriangledown f + t \bigtriangledown g, X > + g = 0$$

Esplicitamente vogliamo delle $X_i(x,t)$ per $i = 1, \ldots, n$ tali che $X_i(0,t) = 0$ e

$$\sum_{i=1}^n X_i(x,t)(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + t\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) + -g(x)$$

Per dimostrare che tali X_i esistono , ricordiamo che per ipotesi $g \in \mathfrak{m}J^2$ cosicchè

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + t\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n (\delta_{ij} + t m_{ij})\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Tale relazione è invertibile in un intorno dell'origine (perchè $det(\delta_{ij} + tm_{ij} = 1$ per $x = 0)$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\frac{\partial f}{\partial x_j} + t\frac{\partial g}{\partial x_j})$$

ove le h_{ij} sono funzioni differenziabili definite vicino all'origine di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Siccome per ipotesi $g \in \mathfrak{m}J(f)$ si avrà una eguaglianza del tipo

$$g = \sum_{i=1}^{n} n_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

con le $n_i(0) = 0$. Assieme alla relazione precedente si ottiene quindi

$$-g(x) = \sum_{i,j=1}^{n} -n_i(x)h_{ij}(x,t)(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + t\frac{\partial g}{\partial x_j}(x))$$

Questa relazione può essere anche scritta :

$$-g = \sum_{j=1}^{n} X_j(x,t)(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + t\frac{\partial g}{\partial x_j}(x))$$

ove le $X_j = \sum_{i=1}^{n} n(x)h_{ij}(x,t)$ sono nulle per $x = 0$ e quindi sono le componenti di un campo avente le proprietà richieste.
Sia ora $t_0 \in \mathbb{R}$ qualsiasi; basterà esaminare la famiglia $f + (t_0 + t)g = (f + t_0 g) + tg = f_{t_0} + tg$ vicino a $t = 0$. Se mostriamo che f e f_{t_0} hanno lo stesso ideale jacobiano, saranno riapplicabili le argomentazioni svolte sopra per il caso $t_0 = 0$ e la dimostrazione sarà conclusa.
Osserviamo che da $g \in J^2(f) \cdot \mathfrak{m}$, ricordando che $J(f) \subset \mathfrak{m}$, si ha $\partial g/\partial x_i \in J(f) \cdot \mathfrak{m}$. Da ciò seguono relazioni

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{1}^{n} mij\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

ove le m_{ij} sono nulle per $x = 0$ e quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + t_0\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{1}^{n}(\delta_{ij} + t_0 m_{ij})\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

per cui $J(f_{t_0}) \subset J(f)$; la relazione inversa è conseguenza del fatto che la matrice $(\delta_{ij} + t_0 m_{ij})$ ha determinante che vale 1 all'origine ed è quindi invertibile.

Mostriamo ora un altro risultato detto ancora lemma di Morse (o teorema Babilonese o splitting lemma) per la cui dimostrazione utilizzeremo il seguente lemma (che è un teorema di divisione elementare)

Lemma 12 *Sia* $k : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *un germe di applicazione differenziabile tale che* $x \to k(x,0)$ *sia un diffeomorfismo locale. Allora per ogni* $\alpha \in \mathcal{E}(n+m)$ *esistono* $a : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *e* $b \in \mathcal{E}(m)$ *tali che*

$$\alpha(x,y) = < k(x,y), a(x,y) > -b(y)$$

Dim. Sia $\chi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tale che $\chi(k(x,y),y) = x$ (per costruirla si inverta $(x,y) \to (k(x,y),y)$). Quindi si ha $\alpha(x,y) = \alpha(\chi(k(x,y),y),y)$. Sia $\phi(z,y) \in \mathcal{E}(n+m)$ definita da $\phi(z,y) = \alpha(\chi(k(z,y),y),y)$. Si ha

$$\phi(z,y) = \phi(0,y) + < \sigma(z,y), z >$$

con $\sigma(z,y) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$. Ponendo $z = k(x,y)$ si ha

$$\alpha(x,y) = \phi(k(x,y),y) = \phi(0,y) + < \sigma(k(x,y),y), k(x,y) >$$

Teorema 13 *Sia $f \in \mathcal{E}(m)$ singolare e tale che*

$$rk(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) = n$$

Allora, modulo un cambiamento di coordinate

$$(\mathbb{R}^m, 0) \simeq (\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^c, 0) = \{(x,y,z)\}$$

si ha $f(x,y,z) = ||x||^2 - ||y||^2 + g(z)$ ove $a + b = n$ e $g \in \mathfrak{m}^3(c)$.

Dim. Sia f definita su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} = \{(x,\lambda,t)\}$ e sia dato un campo di vettori $\dot{x} = a(x,\lambda,t)$, $\dot{\lambda} = 0$, $\dot{t} = 1$. Integrando si ottiene un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^{n+p+1}$ in se : quello che ad (x,λ,t) associa il punto $(\sigma(x,\lambda,t),\lambda,t)$ in cui arriva $(x,\lambda,0)$ dopo un tempo t. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\sigma(x,\lambda,t),\lambda,t) =< \nabla_x f, a > + \frac{\partial f}{\partial t} = b(\sigma(x,\lambda,t),\lambda t)$$

ove tutto è calcolato in $\sigma(x,\lambda,t)$. Supponiamo che $a(x,\lambda,t)$ sia tale che $b(x,\lambda,t)$ non dipenda da x e si costruisca $B(\lambda,t)$ di modo che sia $B(\lambda,0) = 0$ e $\frac{\partial B}{\partial t}(\lambda,t) = b_0(\lambda,t)$. Allora $f(\sigma(x,\lambda,t),\lambda,t) - B(\lambda,t)$ non dipende da t , quindi coincide con $f(x,\lambda,0)$. Si ha così

$$f(x,\lambda,0) + B(\lambda t) = f(\sigma(x,\lambda,t),\lambda,t)$$

e quindi f è equivalente a $f(x,\lambda,0) + B(\lambda,t)$.

Sia ora data f come nelle ipotesi del teorema ; si scelgano coordinate $x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_p,t$ in $\mathbb{R}^m$ con n massimale di modo che la matrice $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ sia non singolare. Allora il lemma precedente assicura l'esistenza di una funzione a come sopra di modo che $f(x,\lambda,t)$ è equivalente a $f(x,\lambda,0) + B(\lambda,t)$ per qualche funzione B. Questa costruzione si può applicare nuovamente alla funzione $f(x,\lambda,0)$ (chiamando t una delle λ_i) e così procedendo si arriva a dimostrare che f è equivalente a $f(x,0,0)+$ una funzione delle altre variabili. E' chiaro allora come la dimostrazione possa essere conclusa utilizzando il lemma di Morse ordinario.

Deformazioni versali

I risultati esposti nel precedente paragrafo possono essere considerati teoremi di rappresentazione locale (cioè come è fatta la funzione in qualche intorno del punto in esame) a partire da informazioni puntuali (ossia la conoscenza del valore di alcune sue derivate nel punto). Essi mostrano infatti casi in cui avendo certe informazioni sullo sviluppo di Taylor in un punto, si riesce a conoscere il comportamento qualitativo della funzione.

Esaminiamo adesso un'altra problematica : data $f \in \mathcal{E}(n)$, come sono fatte le $\tilde{f}$ "vicine" a f ? Precisiamo il "vicine" nel seguente modo.

Una *deformazione* a p -parametri di un germe $f_0 \in \mathcal{E}(n)$ è una $f \in \mathcal{E}(n+p)$ che estende la f_0 : ossia $f(x,u)$ è tale che $f(x,0) = f_0(x)$, ove (x,u) sono le variabili in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Se $f(x,u)$ è una deformazione a p - parametri di f_0 e $u = \phi(v)$ è un germe di applicazione differenziabile di $(\mathbb{R}^n, 0)$ in $(\mathbb{R}^p, 0)$, indicheremo con $\phi^*(f)$ la deformazione a q -parametri definita da $\phi^*(f)(x,v) = f(x,\phi(v))$. Essa verrà detta *deformazione indotta* da f per il *cambiamento di parametri* ϕ . Diremo *isomorfe* due deformazioni di f_0 nello stesso numero di parametri p , che siano ottenibili l'una dall'altra per composizione con un diffeomorfismo di $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ in se del tipo $(x,u) \to (\phi(x,u),u)$ con $\phi(x,0) = x$.

Una deformazione sarà detta *banale* se è isomorfa alla *deformazione costante* $f(x,u) = f_0(x)$. Una deformazione f di f_0 è detta *versale* se ogni altra deformazione di f_0 è isomorfa ad una indotta da f per qualche cambiamento di parametri.

Cercheremo ora di determinare quando una deformazione di f_0 è versale. Sia $f(x,u)$ una deformazione a p -parametri di f_0. Le funzioni $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial u_i}(x,0)$ sono dette *velocità iniziali* della deformazione nelle direzioni $u_1, \ldots, u_p$. Diremo che f è *formalmente versale* se $A(f_0) = \mathcal{E}(n)/J(f_0)$ è generato , come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, dalle velocità iniziali di f_0.

Teorema 14 *Una deformazione versale è formalmente versale.*

Dim. Sia $f(x,u_1,\ldots,u_p)$ versale per f_0. Data una qualsiasi $g \in \mathcal{E}(n)$, $f_0(x) + tg(x)$ è una deformazione ad un parametro di f_0. Quindi essa deve essere isomorfa ad una ottenuta da f per cambiamento di parametro. Osia devono esistere $u_1(t),\ldots,u_p(t) \in \mathcal{E}(1)$, con $u_i(0) = 0$, tali che $f(x,u_1(t),\ldots,u_p(t))$ sia isomorfa a $f_0(x) + tg(x)$; quindi deve esistere $\sigma(x,t) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n, o)$ con $\sigma(x,0) = x$ e tale che $f(\sigma(x,t),u_1(t),\ldots,u_p(t)) = f_0(x) + tg(x)$. Derivando rispetto a t e calcolando per $t = 0$ si ottiene :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,0)\frac{\partial \sigma_i}{\partial t}(x,0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x,0)\dot{u}_i(0) = g(x)$$

quindi g è somma di un elemento di $J(f_0)$ con una combinazione lineare (a coefficienti costanti) delle velocità iniziali (si noti che $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,0) = \frac{\partial f_0}{\partial x_i}(x)$).

Teorema 15 *Una deformazione formalmente versale è versale.*

Dim. Sia $f \in \mathcal{E}(n+p)$ una deformazione formalmente versale di $f_0(x) \in \mathcal{E}(n)$. Quindi $f(x,0) = f_0(x)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}(x,0),\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial u_p}(x,0)$ generano $\mathcal{E}(n)/J(f_0)$ su $\mathbb{R}$. Sia $g(x,v) \in \mathcal{E}(n+q)$ una deformazione qualsiasi di $f_0(x)$. Consideriamo la *deformazione somma* di f e g : $F(x,u,v) \in \mathcal{E}(n+p+q)$ definita da $F(x,u,v) = f(x,u) + g(x,v) - f_0(x)$. Tale F "contiene" sia f che g (come restrizioni a $v = 0$ e $u = 0$ rispettivamente). Quindi per mostrare che g è isomorfa ad una ottenuta da f per cambiamento di parametri, sarà sufficiente mostrare che F è isomorfa ad una indotta da f per cambiamento di parametri. Il teorema precedente sarà così dimostrato dal seguente lemma applicato q volte.

Lemma 16 *Sia $F(x, u_1, \ldots, u_m, t) \in \mathcal{E}(n+m+1)$ una deformazione a $m+1$ parametri di $f_0(x) \in \mathcal{E}(n)$, tale che $\partial F/\partial u_1(x,0,0), \ldots, \partial F/\partial u_m(x,0,0)$ generino $\mathcal{E}(n)/J(f_0)$ su $\mathbb{R}$. Detta $F_0(x,u)$ la deformazione a m parametri indotta da F per $t=0$ (ossia $F_0(x,u) = F(x,u,0)$), esiste un germe differenziabile (una retrazione) $h : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ con $h(u,0) = u$ e tale che F è isomorfa alla deformazione indotta da F_0 tramite h.*

Dim. Cerchiamo germi $a(u,t)$ e $b(x,u,t)$ tali che detta $\phi(x,u,t), h(u,t), t)$ la posizione ove cui arriva il punto $(x,u,0)$ dopo aver seguito per un tempo t il campo $\dot{t} = 1$, $\dot{u} = a(u,t)$ $\dot{x} = b(x,u,t)$, si abbia

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\phi(x,u,t), h(u,t), t) \equiv 0 \tag{1}$$

cosicchè

$$F(\phi(x,u,t), h(u,t), t) = F(x,u,0)$$

Quindi cambiando parametri in $F(x,u,t)$ con la $(u,t) \to (h(u,t),t)$ si ottiene una deformazione isomorfa a $F(x,u,0)$.

La condizione (1) equivale alla :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,u,t) b_i(x,u,t) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial u_j}(x,u,t) a_j(u,t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x,u,t) = 0 \tag{2}$$

Dobbiamo quindi dimostrare che la (2) , considerata come equazione nelle a_j, b_i , è risolubile. Quel che sappiamo è che "riducendo" modulo le u, t tale equazione diviene risolubile; ossia ponendo eguali a zero nella (2) le u, t , si ottiene una equazione in incognite b_i funzioni (germi) nelle x e a_j costanti la cui risolubilità è precisamente l'ipotesi del teorema. La dimostrazione sarà quindi completa se dimostriamo il teorema che segue: siano (x,u) le variabili in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$; per ogni $f \in \mathcal{E}(n+p)$ indichiamo con $\bar{f} \in \mathcal{E}(n)$ il germe di funzione definito da $\bar{f}(x) = f(x,0)$. Evidentemente $f \to \bar{f}$ è un omomorfismo surgettivo. Se $I \subset \mathcal{E}(n+p)$ è un ideale, indichiamo con $\bar{I}$ la sua immagine in $\mathcal{E}(n)$ (si verifica subito che $\bar{I}$ è un ideale in $\mathcal{E}(n)$ perchè l'omomorfismo $\mathcal{E}(n+p) \to \mathcal{E}(n)$ è surgettivo).

Teorema 17 *Siano $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{E}(n+p)$ e sia I un ideale in $\mathcal{E}(n+p)$. Sono fatti equivalenti :*

a) $\bar{I} + \mathbb{R}\bar{g}_1 + \cdots + \mathbb{R}\bar{g}_r = \mathcal{E}(n)$

b) $I + \mathcal{E}(p)g_1 + \cdots + \mathcal{E}(p)g_r = \mathcal{E}(n+p)$

La dimostrazione di questo teorema sarà ricondotta nel prossimo paragrafo ad un risultato (detto teorema di divisione) che sarà dimostrato dopo aver introdotto le funzioni di variabile complessa.

Si noti che la caratterizzazione trovata delle deformazioni versali può essere riassunta nella seguente "ricetta" per costruirle: sia $f_0 \in \mathcal{E}(n)$ un germe singolare; affinchè esso possieda una deformazione versale, l'anello $A(f_0)$ deve essere uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$. Se così è , si scelgano $g_1, \cdots, g_p \in \mathcal{E}(n)$ le cui classi in $\mathcal{E}(n)/J(f_0)$ siano un sistema di generatori su

$\mathbb{R}$. Allora $f(x,u_1,\ldots,u_p) = f_0(x) + u_1 g_1(x) + \ldots + u_p g_p)x)$ è una deformazione versale di f_0. Si deduce anche che la dimensione di $A(f_0)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, è la dimensione minimale d'una deformazione versale e che ogni due deformazioni versali della stessa f_0 aventi lo stesso numero di parametri, sono isomorfe.

Il teorema di preparazione

Diremo che $f(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ è $p-$regolare in t per $p \in \mathbb{N}$ se

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \cdots = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}}(0,0) \quad e \quad \frac{\partial^p f}{\partial t^p}(0,0) \neq 0$$

ossia se la restrizione di f all'asse t si annulla d'ordine esattamente p.

Teorema 18 *Siano $f(x,t), g(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ germi con f che è $p-$regolare in t. Allora esistono $Q(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ e $h_j(x) \in \mathcal{E}(n)$, $j = 1,\ldots,p$ tali che:*

$$g(x,t) = Q(x,t) \cdot f(x,t) + h_1(x)t^{p-1} + \cdots + h_p(x)$$

Ossia si può "dividere" g per f ottenendo per resto un polinomio in t di grado $p-1$ a coefficienti in $\mathcal{E}(n)$.
O ancora in altri termini : $\mathcal{E}(n+1)$/ideale generato da f è generato come modulo su $\mathcal{E}(n)$ da $1, t, \ldots, t^{p-1}$

Nota. Questo risultato è l'unico di questo capitolo che non verrà dimostrato. Una dimostrazione dell'analogo caso analitico sarà fatta più avanti nel capitolo sulle funzioni di più variabili complesse; in tale occasione verranno anche indicate le modifiche necessarie per rendere valida tale dimostrazione anche nel caso C^∞.

Corollario 19 *Sia $f(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ un germe $p-$regolare in t. Esistono germi $u_1(x),\ldots,u_p(x) \in \mathcal{E}(n)$ e $Q(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ tali che $u_i(0) = 0$ per $i = 1,\ldots,p$, $Q(0,0) \neq 0$ e per cui :*

$$f(x,t) = Q(x,t)(t^p + u_1(x)t^{p-1} + \cdots + u_p(x))$$

Dim. E' ottenuta (a meno di segni) dividendo come nel precedente teorema la funzione $g(x,t) = t^p$ per f.

Descriviamo ora una formulazione più algebrica del teorema di preparazione, che viene detta *teorema di preparazione nella forma di J.Mather*

Sia k un corpo. Una *k-algebra locale* è il dato di un anello commutativo con identità A che contiene k, avente un unico ideale massimale $\mathfrak{m}_A$ e tale che l'omomorfismo $A \to A/\mathfrak{m}_A$ induca un isomorfismo tra k e $A/\mathfrak{m}_A$, cosicchè l'inclusione di k in A fornisce una spezzamento della successione esatta:

$$0 \to \mathfrak{m}_A \to A \to A/\mathfrak{m}_A = k \to 0$$

Ad esempio gli anelli $\mathcal{E}(n)$ sono $\mathbb{R}-$algebre locali così come i loro quozienti; al contrario se $K \supset k$ è una estensione propria (ad esempio $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$) allora K è un anello locale, perché ha un unico ideale massimale (lo (0)) ed è una $k-$algebra ma non è una $k-$algebra locale.

Un *omomorfismo* di $k-$algebre locali A , B è un omomorfismo $\phi : A \to B$ che sia l'identità su K e tale che sia "locale" nel senso che applichi l'ideale massimale di A entro l'ideale massimale di B (ossia $\phi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$)

Oss. Si noti che k è una $k-$algebra locale e che ogni automorfismo di k come corpo che non sia l'identità non è un omomorfismo di $k-$algebre anche se è un morfismo di anelli locali. Ciò mostra che la richiesta che ϕ sia l'identità su k non può essere eliminata. Essa è però sufficiente: siano infatti A e B due $k-$algebre locali e sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli che induce l'identità su k. Allora $\phi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$; in altri termini ogni morfismo di $k-$algebre è automaticamente un morfismo di $k-$algebre locali. Infatti se $a \in \mathfrak{m}_A$ sia $\lambda \in k$ tale che $\phi(a) - \lambda \in \mathfrak{m}_B$. Se fosse $\lambda \neq 0$, allora $a - \lambda$ sarebbe invertibile in A e quindi $\phi(a - \lambda) = \phi(a) - \lambda$ lo sarebbe in B il che è assurdo perché esso stà nell'ideale massimale. Quindi $\lambda = 0$ ossia $\phi(a) \in \mathfrak{m}_B$.

Sia A un anello (commutativo con identità come tutti gli anelli di cui tratteremo). Un *modulo* su A è il dato di un insieme X dotato d'una struttura di gruppo abeliano e di una moltiplicazione $A \times X \to X$ indicata con $(a, x) \to a \cdot x$ che sia distributiva a sinistra e a destra rispetto alle somme su A e X, sia associativa, ed *unitaria* nel senso che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in X$.

Dato un insieme S, l'insieme A^S delle applicazioni $\phi : S \to A$ ha una struttura ovvia di A modulo. Il sottomodulo $A(S)$ delle $\phi : S \to A$ che sono nulle tranne un numero finito di $s \in S$, è detto $A-$*modulo libero* generato da S (o su S; vedremo nel seguito una definizione più concettuale di $A-$modulo libero generato da un insieme).
Per $r \in \mathbb{N}$ indicheremo con A^r l'$A-$modulo libero su $S = \{1, \dots, r\}$.

Un $A-$modulo è detto *finito* se è finitamente generato, ossia se è isomorfo ad un quoziente di A^r per qualche $r \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che A sia una $k-$algebra locale e che X sia un $A-$modulo. Diremo che X è *formalmente finito* su A se $X/(\mathfrak{m}_A \cdot X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su k. Qui la notazione $\mathfrak{m}_A \cdot X$ indica il sotto $A-$modulo di X generato dai prodotti di un elemento di $\mathfrak{m}_A$ per un elemento di X; si noti che il quoziente $X/(\mathfrak{m}_A \cdot X)$ è un $A-$modulo e che ogni elemento di $\mathfrak{m}_A$ annulla tutto tale modulo, cosicché esso può essere considerato come un modulo su $k = A/\mathfrak{m}_A$.

E' facile verificare che se un $A-$modulo è finito esso è anche formalmente finito. Anzi, se $x_1, \dots, x_n$ sono generatori di X su A, allora le loro immagini in $X/(\mathfrak{m}_A \cdot X)$ sono generatori di tale spazio vettoriale su k. Infatti se $x \in X$, si ha $x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$; posto $a_i = \lambda_i + m_i$ con $\lambda_i \in k$ e $m_i \in \mathfrak{m}_A$ per $i = 1, \dots, n$, si avrà

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + m_1 x_1 + \dots + m_n x_n$$

Il viceversa in generale è falso; ossia in generale vi sono $A-$moduli formalmente finiti che non sono finiti.

Ad esempio, se $\mathfrak{m}$ è l'ideale massimale di $\mathcal{E}(n)$, $n \geq 1$, l'ideale $\mathfrak{m}_\infty = \cap_{h \geq 1} \mathfrak{m}^h$ è formalmente finito ma non finito.

Altro esempio: $A = k\{x\}$ e $X = k[[x]]$ gli anelli rispettivamente delle serie convergenti e di quelle formali su di un corpo valutato completo (come $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

La verifica di quanto asserito per questi esempi si avvale del seguente risultato:

Lemma 20 (di Nakayama) *Sia A una $\mathbb{R}-$algebra locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Se X è un $A-$modulo finito tale che $\mathfrak{m} \cdot X = X$, allora X è costituito dal solo* 0.

Dim. Siano $x_1, \ldots, x_r$ generatori di X. Allora ogni $x_i \in \mathfrak{m} \cdot X$ e quindi $x_i = \sum_{i=1}^{r} h_{ij} x_j$ con $h_{ij} \in \mathfrak{m}$.
Tale relazione può essere scritta $(I - H) \cdot \bar{x} = 0$ ove I e H sono le matrici δ_{ij} e h_{ij} ed $\bar{x}$ è il vettore colonna di componenti $x_1, \ldots, x_r$.
Se dimostriamo che la matrice $I - H$ è invertibile ne seguirà che $\bar{x} = 0$ e quindi $X = (0)$. Ed infatti $det(I-H) = 1+h$ con $h \in \mathfrak{m}$ e quindi $1+h \notin \mathfrak{m}$ è invertibile in A (perché è un anello locale) cosicché $I - H$ è invertibile.

La seguente conseguenza è spesso utile:

Teorema 21 *Sia A una $\mathbb{R}-$algebra locale e X un $A-$modulo finito. Affinché $x_1, \ldots, x_r \in X$ siano generatori di X su A è necessario e sufficiente che essi inducano generatori di $X/(\mathfrak{m} \cdot X)$ in quanto spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$

Dim. Sia $\tilde{X}$ il quoziente di X per il sotto-A-modulo generato dagli $x_1, \ldots, x_r$. Se essi inducono generatori di $X/(\mathfrak{m} \cdot X)$ su $\mathbb{R}$, allora $\mathfrak{m} \cdot \tilde{X} = \tilde{X}$. Essendo questo finitamente generato il lemma precedente assicura che esso è nullo.

Nel primo degli esempi precedenti si ha $\mathfrak{m}_\infty = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}_\infty$; quindi se $\mathfrak{m}_\infty$ fosse finitamente generato su $\mathcal{E}(n)$, esso sarebbe nullo. Basterà quindi mostrare che esiste un germe di funzione C^∞ non nullo ma con sviluppo di Taylor identicamente nullo.

Per il secondo si ha che se $\mathfrak{m}$ indica l'ideale massimale di $\mathbb{R}\{x\}$ allora $\mathfrak{m} \cdot \mathbb{R}[[x]]$ è l'ideale massimale di $\mathbb{R}[[x]]$ (entrambi tali ideali massimali sono infatti generati da $x_1, \ldots, x_n$). Se $\mathbb{R}[[x]]$ fosse finito su $\mathbb{R}\{x\}$ per il teorema precedente esso sarebbe generato da 1, ossia coinciderebbe con $\mathbb{R}\{x\}$.
Quindi basterà esibire una serie formale che non sia convergente in nessun intorno dell'origine.
Nota. Dal lemma di Nakayama si deduce facilmente che la condizione di esistenza di una deformazione versale per f, ossia il fatto che $\mathcal{E}(f)/J(f)$ abbia dimensione finita come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ equivale al fatto che f abbia in 0 una singolarità isolata, ossia che l'ideale jacobiano $J(f)$ contenga qualche potenza dell'ideale massimale di $\mathcal{E}(n)$, che è la condizione per un germe $f \in \mathcal{E}(n)$ di essere di determinazione finita.

Il teorema di preparazione nella forma di J.Mather, assicura che in certi casi, un modulo formalmente finito è finito.

Premettiamo ancora qualche definizione:
Sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli (supporremo sempre che gli omomorfismi siano *unitari*, ossia $\phi(1_A) = 1_B$). Se X è un $B-$modulo, esso può essere considerato anche come $A-$modulo tramite ϕ: definiamo il prodotto tra un $x \in A$ ed un $x \in X$ con la formula $a \cdot x = \phi(a) \cdot x$.
Def. Un omomorfismo $\phi : A \to B$ di $\mathbb{R}-$algebre è detto *preparabile* se ogni modulo finito su B che sia formalmente finito su A è anche finito su A.

Teorema 22 *Ogni omomorfismo $\phi : \mathcal{E}(n) \to \mathcal{E}(m)$ ottenuto da un germe differenziabile $f : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ definendo $\phi(g) = g \circ f$, è preparabile.*

Osservazioni.

1. Se $\phi : A \to B$ è surgettiva, essa è preparabile; anzi i generatori di X su B costituiscono anche un sistema di generatori per X su A.
2. Se $\phi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ sono preparabili, anche $\psi \circ \phi : A \to C$ lo è. Infatti in tal caso se X è un $C-$modulo, si ha $\mathfrak{m}_A \cdot X \subset \mathfrak{m}_B \cdot X$ perché $\phi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$, e quindi $\dim_{\mathbb{R}} X/(\mathfrak{m}_A \cdot X) \geq dim_{\mathbb{R}} X/(\mathfrak{m}_B \cdot X)$. Quindi se X è finito su C e formalmente finito su A, è anche formalmente finito su B, quindi essendo ψ preparabile è finito su B. Essendo poi ϕ preparabile, esso sarà finito su A.

Le osservazioni precedenti permettono di limitare la dimostrazione del precedente teorema al solo caso che f sia la proiezione $p : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (ossia $p(x,t) = x$). Infatti ogni (germe in 0 di) applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, è composizione della $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ definita da $g(x) = (x, f(x))$ con la proiezione h di $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ sul secondo fattore. Coseguentemente l'omomorfismo $f^* : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{E}(n)$ indotto da f sarà composizione di h^* con g^*. Se mostriamo che p^* è preparabile, allora anche h^* lo sarà (perché composizione di n fattori del tipo di p^*). Per quanto riguarda g^* essa è certamente preparabile perché surgettiva; infatti con un opportuno cambiamento di coordinate nel codominio, g diviene l'inclusione $\mathbb{R}^n \ni x \to (x, 0) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$.

Esaminiamo quindi la seguente situazione: X un modulo sull'anello dei germi in $(x,t) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ finitamente generato diciamo da $x_1, \ldots, x_r \in X$ e tale che quozientandolo per l'$\mathcal{E}(n)-$modulo $\mathfrak{m}(n) \cdot X$ generato dai prodotti di germi in x nulli all'origine per elementi di X, si ottenga uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita; allargando eventualmente il sistema di generatori di X su $\mathcal{E}(n+1)$, possiamo supporre che un suo sistema di generatori di tale spazio vettoriale sia fornito dalle immagini in esso di $x_1, \ldots, x_r$.

Quindi ogni $x \in X$ si può scrivere

$$x = \sum_{j=1}^{r} c_j x_j + \sum_{j=1}^{r} z_j x_j$$

con $c_j \in \mathbb{R}$ e le z_j somme di prodotti di germi in x nulli in 0 per germi in x, t. In particolare per $i = 1, \ldots, r$ si ha

$$t x_i = \sum_{j=1}^{r} (c_{ij} + z_{ij}) x_j$$

ossia

$$\sum_{j=1}^{r} (t\delta_{ij} - c_{ij} - z_{ij}) x_j = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} x_j = 0$$

Indichiamo con $\Delta(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ il determinante della matrice (b_{ij}) e sia B_{ij} una matrice (a coefficienti in $\mathcal{E}(n+1)$) il cui prodotto con la matrice (b_{ij}) sia la matrice identità moltiplicata per $\Delta(x,t)$. Si ha allora $\Delta \cdot \bar{x} = 0$, essendo $\bar{x}$ il vettore verticale di componenti $x_1, \ldots, x_r$. Quindi Δ annulla tutti gli x_i ed essendo questi generatori di X esso annulla tutto X. Ne segue che X è un modulo (finitamente generato) sull'anello quoziente di $\mathcal{E}(n+1)$ per l'ideale generato da Δ. Mostreremo ora che tale quoziente è finitamente generato come modulo su $\mathcal{E}(n)$ ossia sull'anello dei germi in $x \in \mathbb{R}^n$; ne seguirà che anche X è finito su $\mathcal{E}(n)$ e la dimostrazione sarà conclusa.

Osserviamo per prima cosa che $\Delta(x,t)$ è $q-$regolare rispetto a t per qualche q tra 1 e r: infatti $\Delta(0,t)$ è essenzialmente il polinomio caratteristico della matrice (c_{ij}) che è un polinomio monico di grado r.

Il teorema di divisione assicura allora che $\mathcal{E}(n+1)/(\Delta)$ è un modulo su $\mathcal{E}(n)$ generato da $1, t, \ldots, t^{q-1}$: infatti per ogni $g(x,t) \in \mathcal{E}(n+1)$ si ha una relazione

$$g(x,t) = Q(x,t)\Delta(x,t) + \alpha_1(x)t^{q-1} + \ldots + \alpha_q(x)$$

e quindi

$$g(x,t) \equiv \alpha_1(x)t^{q-1} + \ldots + \alpha_q(x) \qquad (mod(\Delta))$$

Germi pari

Un germe $f \in \mathcal{E}(n)$ è detto *pari* se verifica la condizione $f(x) = f(-x)$: sarà detto invece *dispari* se si ha $f(-x) = -f(x)$.

E' facile convincersi che se $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ è un polinomio, allora esso è pari se e solo se "è" un polinomio nelle $x_i x_j$ per $1 \leq i \leq j \leq n$.
Vediamo che ciò è vero anche per funzioni differenziabili, nel senso precisato dal seguente:

Teorema 23 *Sia $f \in \mathcal{E}(n)$ un germe pari. Esiste allora qualche (germe di) funzione F differenziabile nelle $m = n(n+1)/2$ variabili Y_{ij} per $1 \leq i \leq j \leq n$ tale che f è ottenuta da F sostituendo le $x_i x_j$ alle Y_{ij}.*

Dim. Consideriamo l'applicazione $\sigma : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ le cui componenti sono i monomi $x_i x_j$ per $1 \leq i \leq j \leq n$ e sia $\phi : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{E}(n)$ l'omomorfismo ad essa associato. E' chiaro che l'ideale $\phi(\mathfrak{m}(m)) \subset \mathcal{E}(n)$ coincide con il quadrato $\mathfrak{m}^2(n)$ dell'ideale massimale di $\mathcal{E}(n)$. Ne segue che $\mathcal{E}(n)$ è un $\mathcal{E}(m)$ modulo quasi finito ed è quindi finito per il teorema di preparazione. Anzi possiamo anche dedurne che esso è generato come $\mathcal{E}(m)-$modulo da 1 e $x_1, \ldots, x_n$. In altre parole ogni $f \in \mathcal{E}(n)$ si può scrivere

$$f = g + \sum_1^N h_r x_r$$

ove g e le h_r sono ottenute da funzioni in $\mathcal{E}(m)$ (tale scrittura non è univocamente determinata: ad esempio $x_1^2 x_2$ può scrversi sia $(x_1^2) \cdot x_2$ che $(x_1 x_2) \cdot x_1$).
Tale eguaglianza esprime f come somma di una funzione pari e una dispari ed è quindi chiaro che se f è pari, dovrà essere $f = g$. Si noti che in questo modo si vede anche che ogni f dispari è esprimibile come combinazione di $x_1, \ldots, x_n$ a coefficienti funzioni pari.
In modo del tutto analogo si dimostra che se un germe in $\mathcal{E}(n)$ cambia segno ogni volta che si cambia segno ad una sua variabile, allora può essere espresso come una funzione differenziabile dei quadrati x_i^2 delle coordinate.

Germi simmetrici

Un germe $f \in \mathcal{E}(n)$ è detto *simmetrico* se per ogni permutazione σ dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ si ha :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

E' noto dall'algebra che l'insieme dei polinomi $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ che sono simmetrici costituiscono una sottoalgebra isomorfa all'anello dei polinomi in n variabili. Ad esempio un sistema di generatori indipendenti è costituito dai polinomi $P_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$ per $1 \leq k \leq n$. In altri termini si dimostra che per ogni polinomio P simmetrico nelle $x_1, \ldots, x_n$ esiste uno ed un sol polinomio Q in n variabili tale che:

$$P(X_1, \ldots, X_n) = Q(P_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, P_n(X_1, \ldots, X_n))$$

Un altra lista di polinomi simmetrici che genera in modo indipendente tutti gli altri, è quella costituita dai *polinomi simmetrici elementari* (da preferirsi all'altra in molte occasioni, tra l'altro perché funziona anche in caratteristica positiva) che sono costruiti svolgendo il prodotto:

$$(t - X_1) \cdot \ldots \cdot (t - X_n) = \sum_0^n t^i \sigma_{n-i}(x)$$

e prendendo i polinomi $(-1)^i \sigma_i(x)$ per $i = 1, \ldots, n$.
In particolare $\sigma_1(x) = x_1 + \ldots + x_n$ e $\sigma_n(x) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$.
In altre parole i polinomi (o funzioni, come più spesso vengono chiamati) simmetriche elementari calcolate in $x_1, \ldots, x_n$ sono (a parte i segni) i coefficienti dell'unico polinomio monico di grado n che ha come radici $x_1, \ldots, x_n$.
Per $j \in \{1, \ldots, n\}$ si ha quindi:

$$\sum_0^n x_j^i \sigma_{n-i}(x) = 0$$

che può essere scritta anche:

$$x_j^n = \sum_1^n x_j^i \sigma_{n-i}$$

Da ciò si deduce che detta $\sigma : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ l'applicazione con componenti σ_i, e detto $\sigma^* : \mathcal{E}(n) \to \mathcal{E}(n)$ l'omomorfismo associato, Sia si ha:

$$x_j^n \in \sigma^*(\mathfrak{m}(n)) \cdot \mathcal{E}(n)$$

per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$. In particolare ogni monomio di grado almeno n^n appartiene a tale ideale cosicché per k sufficientemente alto si ha

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \sigma^*(\mathfrak{m}(n)) \cdot \mathcal{E}(n)$$

Ne segue che $\mathcal{E}(n)$ è finitamente generato come modulo sulla algebra delle funzioni simmetriche ed anzi che è generato da un numero finito di polinomi (ad esempio dai monomi di grado inferiore a n^n). Se $f \in \mathcal{E}(n)$ è un germe simmetrico, esso si può quindi scrivere :

$$f(x) = \sum_1^N Q_r(x) \cdot F_r(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))$$

ove le Q_r sono polinomi e le F_r germi differenziabili. Facendo operare il gruppo simmetrico si può supporre che anche i Q_r siano simmetrici; applicando allora il risultato di algebra richiamato sopra, si deduce che anche esse possono essere scritte some funzioni (polinomiali) delle σ_i; si è quindi dimostrato che ogni germe simmetrico può essere scritto come una funzione differenziabile delle funzioni simmetriche elementari.

Varietà immerse

Sia $H \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme. Una funzione $f : H \to \mathbb{R}$ è detta *differenziabile* se per ogni $x_0 \in H$ esistono un suo intorno aperto U ed una $F : U \to \mathbb{R}$ differenziabile tali che per ogni $x \in U \cap H$ sia $f(x) = F(x)$.

Se $H \subset \mathbb{R}^N$ e $K \subset \mathbb{R}^M$, una $f : H \to K$ è detta differenziabile se tali sono le sue M componenti in quanto funzioni di H in $\mathbb{R}$.

Diremo che $f : H \to K$ è un *diffeomorfismo* se f è biunivoca e differenziabile assieme alla sua inversa.

Siano $H \subset \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in H$; lo *spazio tangente* ad H in x_0 è l'insieme $T(H)_{x_0}$ dei $v \in \mathbb{R}^N$ tali che per ogni aperto U in $\mathbb{R}^N$ che contiene x_0 e funzione differenziabile $h : U \to \mathbb{R}$ che sia nulla su $U \cap H$ si abbia $dh(x_0)[v] = 0$. E' chiaro che $T(H)_{x_0}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^N$.

Siano $H \subset \mathbb{R}^N$, $K \subset \mathbb{R}^M$, $f : H \to K$ differenziabile e $x_0 \in H$.
Per definizione esistono un aperto U in $\mathbb{R}^N$ contenente x_0 ed una $F : U \to \mathbb{R}^M$ differenziabile che coincide con f su $U \cap H$. Si verifichi per esercizio che $dF(x_0)$ applica $T(H)_{x_0} \subset \mathbb{R}^N$ in $T(K)_{f(x_0)} \subset \mathbb{R}^M$ ed induce quindi una applicazione lineare $\sigma : T(H)_{x_0} \to T(K)_{f(x_0)}$. Inoltre tale σ non dipende dalla particolare estensione F scelta; ossia se U' è un altro aperto in $\mathbb{R}^N$ contenente x_0 e $F' : U' \to \mathbb{R}^M$ è differenziabile e tale che per $x \in U' \cap H$ sia $F'(x) = f(x)$, allora per $v \in T(H)_{x_0}$ si ha $dF(x_0)[v] = dF'(x_0)[v]$.
Si ottiene così una ben definita applicazione lineare $df(x_0) : T(H)_{x_0} \to T(K)_{f(x_0)}$ che sarà detta il *differenziale* di f in x_0.
Def. Un sottoinsieme $H \subset \mathbb{R}^N$ è detto una *varietà differenziabile* di dimensione n se ogni suo punto ha un intorno aperto diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.
Diremo invece che H è una *varietà differenziabile a bordo* di dimensione n se ogni suo punto ha un intorno aperto diffeomorfo ad un aperto di $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.
Esempi (definizioni,esercizi,complementi)

1. Consideriamo la varietà a bordo $X = [0, = \infty] \times \mathbb{R}^{n-1}$ e poniamo $\partial X = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Si verifichi che ogni diffeomorfismo $f : U \to V$ tra aperti di X applica $U \cap \partial X$ in $V \cap \partial X$. Ciò permette di definire il *bordo* ∂X per ogni varietà a bordo X di dimensione n e di dimostrare che esso è una varietà (senza bordo) di dimensione $n - 1$. Ad esempio $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x|| \leq 1\}$ è una varietà compatta a bordo (detta il *disco* di dimensione n) il cui bordo è S^{n-1} (la *sfera* di dimensione $n - 1$).

2. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ una applicazione differenziabile. Allora $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \ : \ x \in \Omega \ , \ y = f(x)\}$ è una varietà differenziabile di dimensione n (infatti $x \mapsto (x, f(x))$ è un diffeomorfismo tra Ω ed X).

3. Siano X , Y varietà differenziabili di dimensioni p e q; allora $X \times Y$ è una varietà differenziabile di dimensione $p + q$. Se una delle due è a bordo anche il prodotto lo è. Se entrambi hanno il bordo non vuoto, $X \times Y$ non è una varietà.

4. Sia $f : X \to Y$ una applicazione differenziabile tra varietà. Diremo che $x \in X$ è un *punto critico* per f se $df(x) : T(X)_x \to T(Y(_{f(x)}$ non è surgettiva; altrimenti diremo che x è un *punto regolare.*
Diremo che $y \in Y$ è un *valore critico* per f se è immagine di qualche punto critico. Altrimenti esso sarà detto un *valore regolare.*
Si dimostri che l'insieme dei punti critici è un chiuso in X e che l'insieme dei valori critici può non essere un chiuso in Y.

5. Sia $f : X \to Y$ differenziabile tra varietà di dimensione $n + p$ e p.

Si dimostri che se $y \in Y$ è un valore regolare allora $X_0 = f^{-1}(y)$ è una sottovarietà di X di dimensine n. Se ciò accade ed è $Y = \mathbb{R}^p$ e $y = 0$, diremo che f è una *equazione (globale) di definizione* per X_0 in X.
Si dimostri che se X_0 è una sottovarietà di X , ogni $x \in X_0$ ha un intorno aperto U sul quale esiste una equazione di definizione h per $X_0 \cap U$.

Una coppia del tipo (U, h) sarà detta una *equazione locale di definizione* per X_0 in X.

6. Una applicazione differenziabile $f : X \to Y$ tra varietà è detta un *prodotto* se esistono una varietà F ed un diffeomorfismo $h : X \to F \times Y$ tale che detta $p : F \times Y \to Y$ la proiezione canonica si abbia $p \circ h = f$. Necessariamente una tale f è priva di punti critici.

Viceversa se $f : X \to Y$ è differenziabile ed $x \in X$ è regolare, allora x ha un intorno aperto U in X tale che $f(U)$ è aperto in Y e la restrizione di f da U in $f(U)$ è un prodotto.

7. Sia 0 un valore regolare per $f : X \to \mathbb{R}$; allora $M = \{x \in X \ : \ f(x) \geq 0\}$ è una varietà a bordo con $\partial M = f^{-1}(0)$. Si dimostri inoltre che in tal caso $\{(x, y) \in X \times \mathbb{R}^n \ : \ ||y||^2 = f(x)\}$ è una *ipersuperficie* (ossia una sottovarietà di dimensione uno meno di quella dell'ambiente) in $X \times \mathbb{R}^n$.

8. Una applicazione differenziabile $\phi : X \to Y$ tra varietà è detta una *immersion* se il suo differenziale $d\phi(x)$ è iniettivo per ogni $x \in X$. Diremo invece che è un *embedding* se è un diffeomorfismo tra X e la sua immagine; ciò equivale a dire che è una immersion ed è un omeomorfismo. Diremo che una varietà X di dimensione n ha codimensione di embedding p se esiste un suo embedding in $\mathbb{R}^{n+p}$. Ad esempio la sfera S^n ha codimensione di embedding uno. Analoga definizione per la nozione di immersion.

E' facile dimostrare che per S^1 non esiste alcuna immersion in $\mathbb{R}$.
Si dimostri più in generale che una varietà compatta non vuota di dimensione n non ha alcuna immersion (e quindi neppure un embedding) in $\mathbb{R}^n$.

9. Sia ϕ una applicazione differenziabile di una varietà a bordo X in una varietà (senza bordo) Y. Un punto $x_0 \in X$ è detto *regolare* per ϕ se o $x_0 \in \partial X$ ed x_0 è un punto regolare per la restrizione di ϕ a $X - \partial X$, oppure $x_0 \in \partial X$ ed allora x_0 è regolare per la restrizione di ϕ a ∂X.

Si dimostri che se $x_0 \in \partial X$ è regolare per $\phi : X \to \mathbb{R}^n$, allora esiste un intorno aperto U di x_0 in X ed un diffeomorfismo h (un sistema di coordinate locali) tra U e $D^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+p} \ : \ ||x|| \leq 1 \ , x_{n+p} \geq 0\}$ per cui $h(0) = 0$ e l'applicazione ϕ diviene $(x_1, \ldots, x_{n+p} \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$.

Ciò può essere riformulato come segue: sia X una sottovarietà a bordo di una varietà a bordo Y; diremo che X è *ben messa* in Y se si ha:

$$\partial X = X \cap \partial Y$$

e se per ogni $x \in \partial X$ si ha:

$$T_x(\partial X) = T_x(X) \cap T_x(\partial Y)$$

Da quanto sopra detto si ottiene che se $\phi : M \to N$ è una applicazione differenziabile di una varietà a bordo M in una varietà (senza bordo) N, allora la fibra X di ϕ su un valore regolare, è una sottovarietà a bordo ben messa in M.

Spazi paracompatti e partizioni dell'unità

Nel seguito ogni spazio topologico è supposto (se non esplicitamente dichiarato) separato ed a base numerabile.
Definizioni:
- Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico X è detta *puntualmente finita* se ogni $x \in X$ appartiene solo ad un numero finito di elementi di $\mathcal{F}$; è detta *localmente finita* se ogni $x \in X$ possiede un intorno che incontra solo un numero finito di elementi di $\mathcal{F}$.
- Una famiglia $\mathcal{F}$ è *più fine* di una famiglia $\mathcal{G}$ se ogni elemento di $\mathcal{F}$ è contenuto in qualche elemento di $\mathcal{G}$.
- Uno spazio topologico X è detto *localmente compatto* se ogni punto possiede almeno un intorno compatto. E' facile verificare che allora gli intorni compatti di un punto costituiscono un suo sistema fondamentale di intorni.
- Uno spazio topologico X è detto *paracompatto* se per ogni ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ di X che sia localmente finito e più fine di $\mathcal{U}$ (in generale $\mathcal{V}$ non è costruibile come una sottofamiglia di $\mathcal{U}$; si prenda ad esempio per $\mathcal{U}$ la famiglia delle palle di centro l'origine in $\mathbb{R}^n$).
- Uno spazio topologico X è detto *numerabile all'infinito* se è ricopribile con una successione (numerabile) di compatti ognuno contenuto nella parte interna del successivo; una tale successione di compatti verrà detta *esaustiva* .

Proposizione 24 *Ogni spazio localmente compatto è numerabile all'infinito*

Dim. Sia $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerabile di X; possiamo supporre che ogni B_n abbia chiusura compatta (infatti gli elementi della base originaria che hanno tale proprietà costituiscono ancora una base). Per ogni intero r sia H_r la chiusura di $B_0 \cup \ldots \cup B_r$. Per ogni intero r esiste un intero $s > r$ tale che H_r è contenuto nella parte interna di H_s e ciò dimostra che eliminando alcuni degli H_i resta una successione esaustiva di compatti per X.

Proposizione 25 *Ogni spazio localmente compatto è paracompatto*

Sia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione esaustiva di compatti per X. Per ogni intero $n \geq 1$ sia Ω_n l'aperto ottenuto togliendo alla parte interna di K_{n+1} il compatto K_n. La famiglia $\Omega_n)_{n\geq 1}$ è un ricoprimento aperto di X che è numerabile, localmente finito ed i cui elementi sono relativamente compatti.

Sia allora $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto qualsiasi di X; per ogni intero positivo n esiste $I_n \subset I$ finito tale che Ω_n sia contenuto nell'unione degli U_i per $i \in I_n$; ne segue che la famiglia degli $\Omega_n \cap U_i$ per n intero positivo ed $i \in I_n$ costituisce un ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ localmente finito più fine di $\mathcal{U}$. Si noti che tale $\mathcal{V}$ è inoltre numerabile ma d'altra parte si noti anche che in ogni ricoprimento aperto localmente finito di X gli aperti non vuoti sono al più una infinità numerabile.

Partizioni dell'unità

Diremo che una funzione f a valori reali su uno spazio topologico X è *localmente nulla* in $x \in X$ se essa è identicamente nulla su qualche intorno di x. L'insieme dei punti $x \in X$ nei quali f non è localmente nulla costituisce un chiuso che viene detto il *supporto* di f. Una famiglia $(f_i)_{i\in I}$ di funzioni su X è detta *localmente finita* se tale è la famiglia dei suoi supporti.

Una *partizione dell'unità* sullo spazio topologico X è una famiglia localmente finita $(f_i)_{i\in I}$ di funzioni continue su X tale che $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$ per ogni $x \in I$. Tale partizione è detta *più fine* di un ricoprimento $\mathcal{U} = (U_j)_{j\in J}$ se così è la famiglia dei supporti delle f_i. Se inoltre accade che $I = J$ e per ogni $i \in I$ il supporto di f_i è contenuto in U_i allora diremo che la partizione è *subordinata* ad $\mathcal{U}$.

Lemma 26 *Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Se esiste una partizione $(f_j)_{j\in J}$ su X più fine di $\mathcal{U}$ allora ne esiste anche una $(F_i)_{i\in I}$ subordinata ad $\mathcal{U}$*

Dim. Per ipotesi esiste $\nu : J \to I$ tale che per ogni $j \in J$ il supporto di f_j sia contenuto $U_{\nu(j)}$. Per ogni $i \in I$ si definisca $F_i = \sum_{j\in\nu^{-1}(i)} f_j$; si verifica con un po(co) di lavoro che $(F_i)_{i\in I}$ è una partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{U}$.

Teorema 27 *Su uno spazio localmente compatto ogni ricoprimento aperto ha partizioni dell'unità a lui subordinate*

Dim.

La dimostrazione si avvale del teorema di esistenza di funzioni continue detto lemma di Uhrison. Per evitarne l'uso e per trattare allo stesso tempo gli analoghi risultati nel caso differenziabile, si può supporre che su X sia assegnata una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni continue che abbia la seguente proprietà:

- dati comunque $x \in X$ ed un intorno U di x esiste una $f \in \mathcal{F}$ non nulla in x ed avente supporto contenuto in U.

Se X è una varietà topologica (o differenziabile) si possono costruire famiglie siffatte trasportando tramite carte locali su X delle funzioni standard su $\mathbb{R}^n$; oppure se X è metrico si costruiscono facilmente funzioni continue con tale proprietà utilizzando la metrica stessa. Passando ai quadrati si può supporre che gli elementi di $\mathcal{F}$ siano funzioni positive.

Veniamo alla dimostrazione. Per quanto visto avanti si può supporre che il ricoprimento dato sia numerabile, localmente finito e costituito da aperti localmente compatti. Sia esso $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vogliamo definire induttivamente funzioni continue $g_n : X \to R$ ed aperti $V_n \subset X$ per $n \in \mathbb{N}$ soddisfacenti le condizioni:

- il supporto di g_n contiene V_n ed è contenuto in U_n

- $V_0, \ldots, V_n$ assieme a tutti gli U_i per $i > n$ ricoprono X

operiamo così : sia F il complementare di $\bigcup_{n>0} U_n$; esso è un compatto contenuto in U_0 ed utilizzando l' esistenza di funzioni locali si può costruire una funzione continua g_0 strettamente positiva su F ed il cui supporto sia contenuto in U_0. Si scelga quindi per V_0 un intorno aperto di F contenuto nel supporto di g_0. Supposti costruiti $g_0, \ldots g_n$ e $V_0, \ldots V_n$ si considera il complementare F dell'unione di $V_0, \ldots V_n$ con gli U_r per $r > n+1$ e si ripete la costruzione precedente ottenendo una g_{n+1} ed un V_{n+1}. Evidentemente la funzione $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ è positiva strettamente e le $f_n = g_n/g$ formano una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\mathcal{U}$.
Nota. E' chiaro che se X è una varietà differenziabile tutta la costruzione può essere fatta utilizzando funzioni differenziabli su X.

Applicazioni proprie

In questa appendice ogni spazio topologico è supposto oltre che separato ed a base numerabile anche localmente compatto.

Definizioni
- Una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è detta *chiusa* se trasforma chiusi di X in chiusi di Y. E' detta *propria* se è continua e se f^{-1} trasforma compatti di Y in compatti di X.
- Diremo che una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio topologico X *diverge* od anche che *tende all'*∞ se per ogni compatto $K \subset X$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \notin K$ per $n \geq n_0$. Per le ipotesi fatte su X ciò equivale al non possedere sottosuccessioni convergenti ossia a non avere punti aderenti.

Proposizione 28 *Sia $f : X \to Y$ continua. Sono equivalenti le condizioni:*
(a) f *è propria*
(b) f *è chiusa ed $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$*
(c) f *trasforma successioni divergenti in X in successioni divergenti in Y*

Dim.(a)$\Rightarrow$ (b) : Evidentemente le fibre di f sono compatte. Mostriamo che se C è chiuso in X allora $f(C)$ è chiuso in Y. Sia y in $Y - f(C)$ e consideriamo la famiglia $\mathcal{K}$ degli intorni compatti di y. Essendo Y localmente compatto si ha $\bigcap_{K\in\mathcal{K}} K = \emptyset$. Allora $\bigcap_{K\in\mathcal{K}} f^{-1}(K) \cap C = \emptyset$ ed essendo tali insiemi compatti in X , l'intersezione di un numero finito di essi è vuota. Si ottiene quindi l'esistenza di un $K \in \mathcal{K}$ per il quale $f^{-1}(K) \cap C = \emptyset$ e ciò implica che $K \cap f(C) = \emptyset$; Quindi $f^{-1}(C)$ è chiuso perché ogni punto che non gli appartiene possiede un intorno che non lo interseca.
(b)$\Rightarrow$(c) : Se (c) non è verificata esiste una successione (x_n) divergente in X e tale che $f(x_n)$ converge ad un $y \in Y$. Essendo (x_n) divergente, l'insieme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ è chiuso in X; per (b) quindi $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ è chiuso in Y. Se ne deduce che y deve essere uno degli $f(x_n)$; anzi, siccome ciò deve rimanere vero per ogni sottosuccessione deve esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_n) = y$ per ogni $n \geq n_0$. Quindi la successione $(x_n)_{n\geq n_0}$ è contenuta in $f^{-1}(y)$ che per ipotesi è compatto e non può essere divergente contrariamente all'ipotesi fatta.
(c)$\Rightarrow$ (a) : Sia K un compatto in Y. Se per assurdo $f^{-1}(K)$ non fosse compatto in X, esso conterrebbe una successione (x_n) divergente in $f^{-1}(K)$ ma divergente anche in X perché esso è chiuso in X. Ma $(f(x_n))$ è una successione nel compatto K e non può quindi essere divergente; si è così contraddetto la (c) e la dimostrazione è conclusa.

Proposizione 29 *Sia $f : X \to Y$ una applicazione propria. Se $y \in Y$ ed U è un aperto di X che contiene $f^{-1}(y)$, esiste un intorno V di y in Y tale che $f^{-1}(V) \subset U$.*
In altri termini : le immagini inverse di intorni di y costituiscono un sistema fondamentale di intorni per la fibra $f^{-1}(y)$

Dim. Sia $\mathcal{K}$ la famiglia degli intorni compatti di y in Y; si ha allora $\bigcap_{K\in\mathcal{K}} f^{-1}(K) - U = \emptyset$. Essendo questa una famiglia di compatti, chiusa per intersezioni finite, se ne deduce l'esistenza di un $K \in \mathcal{K}$ tale che $f^{-1}(K) - U = \emptyset$ ossia $f^{-1}(K) \subset U$.

Varietà astratte

Chiameremo varietà topologica di dimensione n , ogni spazio topologico che sia di Hausdorff, a base numerabile ed in cui ogni punto abbia un intorno omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$. Fissare su X una struttura di varietà differenziabile (astratta) equivale ad aver scelto per ogni aperto $U \subset X$ una sottoalgebra $\mathcal{E}(U)$ dell'algebra $\mathcal{C}(U)$ delle funzioni continue a valori reali su U, i cui elementi saranno detti *funzioni differenziabili* o *regolari* su U , di modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

1. se $(U_i)_{i\in I}$ è una famiglia di aperti di X la cui unione è U ed $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione, allora $f \in \mathcal{E}(U)$ se e solo se $f_{|U_i} \in \mathcal{E}(U_i)$ per ogni $i \in I$.

2. ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U che ammette un omeomorfismo con un aperto V di $\mathbb{R}^n$ che trasforma l'algebra $\mathcal{E}(U)$ nell'algebra delle funzioni differenziabili (nel senso usuale) su V. Una coppia (U, h) siffatta sarà detta una *carta regolare* su X.

Queste varietà saranno dette *astratte* mentre quelle definite nel precedente paragrafo saranno dette immerse.

Nota. Il significato di "immersione " è quello di "embedding" definito in un precedente esercizio. Purtroppo l'utilizzo di un termine inglese ha l'inconveniente di non poter essere declinato in modo italiano; ad esempio il plurale dovrebbe essere "embeddings" e si dovrà a volte usare il verbo "to embed" che verrebbe voglia di tradurre "embeddare" come talvolta si fa tra addetti ai lavori. Il problema linguistico si pone perché in inglese si hanno due termini "immersion" e "embedding" che vengono utilizzati come descritto prima. In francese sono state trovate due parole "immersion" e "plongement" ; in italiano potremmo utilizzare la parole "immersione" e "prolungamento" che però non è affatto la traduzione del termine francese che significa ancora "immersione" mentre prolungamento è quel che in francese si dice "prolongement". Potremmo utilizzare, a buon diritto, il termine "immissione" e parallelamente utilizzare i verbi "immergere" e "immettere" per distinguere i due concetti . Ma così non viene fatto da chi usa questi termini in Italia ed è invece più frequente udire l'utilizzo di termini inglesi o di altre lingue straniere declinati all'italiana, cosa che faremo anche noi nel seguito in diverse altre occasioni, rispettando quella che sembra essere una prassi ormai consolidata nell'uso volgare della lingua, spesso anche in assenza di giustificazioni di natura tecnica.

E' chiaro che ogni varietà immersa ha una struttura naturale di varietà astratta. Il teorema di immersione di Whitney, che sarà discusso tra poco asserisce che viceversa ogni varietà astratta è " diffeomorfa" a qualche varietà immersa. Cosa si intende per diffeomorfismo tra varietà astratte viene precisato nel modo seguente: siano X , Y due tali varietà; una applicazione $\phi : X \to Y$ è detta differenziabile se è continua e se per ogni scelta di aperti $U \subset X$ e $V \subset Y$ con $\phi(U) \subset V$ e funzione f regolare su V , la $f \circ \phi$ è regolare su U. Diremo allora che $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo se è biunivoca e differenziabile assieme alla sua inversa.

Nota. La costruzione di partizioni dell'unità differenziabili su varietà astratte può essere effettuata in modo analogo a come descritto avanti nel caso topologico.

Teorema 30 (Immersione di Whitney) *Sia X una varietà astratta compatta di dimensione n. Allora essa è diffeomorfa a qualche varietà immersa.*

Dim. Siano $(U_1, h_1), \dots, (U_r, h_r)$ carte su X tali che ogni $h_i(U_i)$ sia la palla unitaria in $\mathbb{R}^n$ e gli $U_1, \dots, U_r$ ricoprano X e siano $0 < a < b < 1$ tali che gli aperti $V_i = \{x \in U_i \ : \ ||h_i(x)||^2 < a\}$ per $i = 1, \dots, r$ ricoprano X.
Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile e tale $\phi(\lambda) = 1$ se e solo se $\lambda \leq a$ e $\phi(\lambda) = 0$ per $\lambda \geq b$.

La funzione $\phi_i = \phi(||h_i||^2)$ è differenziabile su U_i ed è nulla in un intorno della sua frontiera; essa può quindi essere estesa ad una funzione differenziabile su tutto X , che indicheremo ancora con ϕ_i, facendole assumere il valore zero nei punti fuori di U.
Analogamente le applicazioni $\tilde{h}_i(x) = \phi_i(x) \cdot h_i(x)$, poste uguali a zero fuori di U_i, saranno applicazioni differenziabili di X in $\mathbb{R}^n$.

Sia $\Phi : X \to \mathbb{R}^{nr} \times \mathbb{R}^r$ definita da :

$$x \mapsto (\tilde{h}_1(x), \dots, \tilde{h}_r(x), \phi_1(x), \dots, \phi_r(x))$$

Verificheremo ora che Φ è un diffeomorfismo tra X e una sottovarietà differenziabile in $\mathbb{R}^{nr} \times \mathbb{R}^r$.

Φ è iniettiva : infatti siano $x_1, x_2 \in X$ con $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$. Per costruzione x_1 appartiene ad un V_{i_0} per cui $\phi_{i_o}(x_1) = 1$; allora essendo $\phi(x_2) = 1$ si ha anche $x_2 \in V_{i_0}$. Ora su V_{i_0} la $\tilde{h}_i$ coincide con la h_i ed essendo questa iniettiva si deduce che $x_1 = x_2$.

Φ ha inversa differenziabile : infatti localmente l'inversa di Φ , letta sulla carta (U_i, h_i) ristretta a V_i coincide con la restrizione di una delle proiezioni canoniche $\mathbb{R}^{nr} \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$.

Oss. Il teorema precedente rimane valido anche senza l'ipotesi di compattezza. La dimostrazione in tal caso utilizza la nozione di dimensione di Lebesque e alcuni risultati di topologia relativi ad essa.

Vedremo in seguito che ogni varietà di dimensione n è diffeomorfa ad una sottovarietà di $\mathbb{R}^{2n+1}$ ossia ha codimensione di embedding al più $n + 1$.

Esempi (definizioni ...)

10. Ogni varietà immersa è, in modo naturale, una varietà astratta.

11. Sia X una varietà topologica di dimensione n. Una *carta* su X è una coppia (U, h) ove U è un aperto di X e h un omeomorfismo tra U ed un aperto di $\mathbb{R}^n$. Due tali carte (U_i, h_i) per $i = 1, 2$ sono dette *compatibili* se l'omeomorfismo di $h_1(U_1 \cap U_2)$ con $h_2(U_1 \cap U_2)$ indotto dalla composizione di h_2 con h_1^{-1} è un diffeomorfismo. Un *atlante regolare* su X è il dato di una famiglia di carte $(U_i, h_i)_{i \in I}$ su X a due a due compatibili e tali che $(U_i)_{i \in I}$ sia un ricoprimento di X. E' chiaro che allora esiste su X una ed una sola struttura di varietà differenziabile astratta in cui una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ su un aperto U di X è regolare se e solo se per ogni $i \in I$ la restrizione di f ad $U \cap U_i$ letta in $h_i(U \cap U_i)$ tramite h_i è differenziabile.

Questo è il modo nel quale spesso vengono introdotte varietà differenziabili.

Ad esempio sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, ottenuto come spazio topologico come quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, per $0 \leq i \leq n$ l'insieme U_i dei punti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che hanno un rappresentante $(x_0, \dots, x_n)$ con $x_i \neq 0$ è un aperto sul quale le coordinate omogenee ottenute ponendo eguale ad uno la $i-$esima coordinata, danno un suo omeomorfismo con $\mathbb{R}^n$. Tali $n+1$ carte danno un atlante regolare su $\mathbb{P}^n$.

12. Come sopra ma senza supporre che X sia uno spazio topologico.
Sia X un insieme qualsiasi. Una *carta* su X è una coppia (U,h) ove $U \subset X$ è un sottoinsieme e h una applicazione biunivoca tra U ed un aperto di $\mathbb{R}^n$. Due tali carte (U_i,h_i) per $i=1,2$ sono dette *compatibili* se l'applicazione biunivoca di $h_1(U_1 \cap U_2)$ con $h_2(U_1 \cap U_2)$ indotto dalla composizione di h_2 con h_1^{-1} è un diffeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$. Un *atlante regolare* su X è il dato di una famiglia di carte $(U_i,h_i)_{i\in I}$ su X a due a due compatibili, tali che $(U_i)_{i\in I}$ sia un ricoprimento di X e tali che sia di Hausdorff la topologia su X in cui un sottoinsieme $A \subset X$ è un aperto se e solo se per ogni carta (U_i,h_i) l'insieme $h_i(A\cap U_i)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$.
E' chiaro che un tale atlante individua come nel punto 11 una struttura di varietà (astratta) su X.

13. Nel punto 12 la condizione che la topologia di X venga di Hausdorff viene posta per evitare fenomeni del seguente tipo:
si incollino due copie di $\mathbb{R}$ identificando punti con la stessa ascissa se essa è diversa da zero: insiemisticamente il quoziente X può essere pensato come una retta in cui l'origine è stata sdoppiata in due punti; su tale X vi sono due carte compatibili tra loro ma che non verificano la condizione topologica. In generale questa sarà soddisfatta se per ogni coppia di carte date su X, la corrispondenza associata ha *grafico* chiuso nel prodotto: ossia se $\{(h_1(x),h_2(x)) \ : \ x \in U_1 \cap U_2\}$ è chiuso in $h_1(U_1)\times h_2(U_2)$. (Si rammenti che uno spazio è di Hausdorff se e solo se la diagonale $\Delta = \{(x,x) \ : \ x \in X\}$ è chiusa in $X\times X$).

Ad esempio si controlli che se $X = \mathcal{G}r(p,n)$ è l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione p in $\mathbb{R}^n$ (verrà detta la *grasmanniana* dei $p-$piani in $\mathbb{R}^n$), i seguenti dati costituiscono un atlante regolare nel senso del punto 12:
detto N un insieme di n elementi (ad esempio $N=\{1,\dots,n\}$), si identifichi $\mathbb{R}^n$ con l'insieme $\mathbb{R}^N$ delle applicazioni di N in $\mathbb{R}$. Per ogni sottoinsieme $P \subset N$ costituito da p elementi sia $k_P : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^P,\mathbb{R}^{N-P}) \to \mathcal{G}r(p,n)$ l'applicazione che associa ad ogni applicazione lineare il suo grafico; ogni tale k_P è iniettiva e quindi la sua inversa h_P è una carta. Tali h_P, al variare di P tra i sottoisiemi di cardinalità p in I, danno a $\mathcal{G}r(p,n)$ una struttura di varietà differenziabile.

14. Un *gruppo di Lie* è una varietà differenziabile che sia un gruppo in cui le operazioni $G\times G \ni (g,h) \mapsto G$ e $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ sono differenziabili.

Ad esempio $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n) \simeq$ gruppo delle matrici quadrate d'ordine n invertibili , $\mathcal{A}ff(\mathbb{R}^n)$ =trasformazioni affini su $\mathbb{R}^n$ (ossia applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in se del tipo $x \mapsto Ax+b$ con $A\in \mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n)$ e $b\in\mathbb{R}^n$), il gruppo moltiplicativo del corpo dei reali, dei complessi, dei quaternioni.

Si può dimostrare che ogni sottogruppo chiuso H di un grupo di Lie G è una sottovarietà differenziabile e quindi anch'esso un gruppo di Lie (vien detto *sottogruppo di Lie*); è elementarmente dimostrabile (si può provare a farlo per esercizio) che in tal caso il quoziente G/H costituito dalle classi laterali sinistre, diviene una varietà considerando come funzioni differenziabili su un aperto $U \subset G/H$ le funzioni $f : U \to \mathbb{R}$ tali che $f\circ\pi$ sia differenziabile su $\pi^{-1}(U)$ ove $\pi : G \to G/H$ è la proiezione canonica. Ne segue che $\phi : G/H \to Z$ ove Z è una varietà differenziabile, Z è una applicazione differenziabile se e solo se $\phi\circ\pi$ lo è da G in Z. In particolare quindi se $H\subset G$ è anche normale, G/H è in modo naturale un gruppo di Lie.

Ciò dà un altro modo di introdurre la struttura differenziabile su $\mathcal{G}r(p,n)$:

sia $G = \mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n)$ ed H il sottogruppo degli automorfismi che conservano (cioè mandano in se) il sottospazio delle prime p coordinate; il quoziente G/H è identificabile in modo naturale con $\mathcal{G}r(p,n)$.

15. Si dimostri direttamente che se b è una forma bilineare simmetrica (o antisimmetrica) su $\mathbb{R}^n$, allora il gruppo $O(b)$ costituito dalle $\phi \in \mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n)$ che conservano b (ossia $b(x,y) = b(\phi(x),\phi(y))$ per ogni $x,y \in \mathbb{R}^n$) è una sottovarietà differenziabile. Ad esempio se b è il prodotto scalare standard, detto $\mathcal{S}$ lo spazio delle matrici simmetriche di ordine n, si consideri l'applicazione f di $\mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}$ definita da $A \mapsto {}^tAA$ e si dimostri che $I \in \mathcal{A}ut(\mathbb{R}^n)$ è un punto regolare per f; essendo $O(b)$ un gruppo ne segue che $I \in \mathcal{S}$ è un valore regolare.

16. $\mathbb{R}^n - \{0\}$ è diffeomorfo a $S^{n-1} \times]0,\infty[$ per l'applicazione $\phi : x \to (x/||x||, ||x||)$. Sia $X \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una sottovarietà ; essendo $\mathbb{R}$ diffeomorfo a $]0,+\infty[$, si può supporre che X sia contenuta in $\mathbb{R}^m \times]0,+\infty[$. Ne segue che $X \times S^p$ ha un embedding in $\mathbb{R}^m \times]0,+\infty[\times S^p \subset \mathbb{R}^{m+p+1}$.

Quindi la codimensione di embedding (o immersion) di una varietà X in spazi euclidei non cresce per moltiplicazione con sfere (va escluso il solo caso in cui X sia ridotta ad un punto).

17. Siano X una varietà (ad esempio $X = \mathbb{R}^n$) e $f : X \to \mathbb{R}$ differenziabile avente 0 come valore regolare. Allora $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R}^p \ : \ f(x) = ||y||^2\}$ è una sottovarietà di codimensione uno in $X \times \mathbb{R}^p$.

18. Siano X una varietà differenziabile , G un gruppo di diffeomorfismi di X in se e sia $\pi : X \to X/G$ il quoziente (topologico) di X per la relazione $x \equiv y$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $g(x) = y$. Una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ ove U è un aperto in X/G sarà detta "regolare" se $f \circ \pi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ è differenziabile.

Si discuta in quali dei casi seguenti X/G è una varietà differenziabile:

- $X = \mathbb{R}^n$, $G =\{$traslazioni di $\mathbb{R}^n$ in se di vettore $v \in \mathbb{Z}^n\}$.
- $X = \mathbb{R}^2$ e G generato dalle trasformazioni
  $\sigma(x,y) = (x+1,y) \qquad \tau(x,y) = (x,-y+1)$
- $X = S^{n-1}$ e G generato dalla mappa antipodale $(x,y) \to (-x,-y)$
- $X = S^p \times S^q$ e G generato dalla mappa $(x,y) \to (-x,-y)$
- $X = S^3 = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ e G generato da
  $(z_1,z_2) \to (\omega_1 z_1, \omega_2 z_2)$ ove $\omega_1, \omega_2 \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$

Il teorema fondamentale dell'algebra

Questo paragrafo oltre a dare una dimostrazione di un importante risultato, costituisce soprattutto una introduzione abbastanza semplice a diverse tecniche che saranno sviluppate nel seguito in situazioni più complicate.

Teorema 31 *Ogni polinomio $P(T) \in \mathbb{C}[T]$ di grado positivo, ha almeno una radice in $\mathbb{C}$*

Possiamo supporre che P sia monico:

$$P(T) = T^n + a_1 Y^{n-1} = \ldots + a_n$$

Indichiamo con $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'applicazione ottenuta calcolando P nei punti di $\mathbb{C}$.

A. ϕ è propria. Infatti per $|z| \to +\infty$ si ha $|\phi(z)| \to +\infty$ e quindi ϕ porta successioni divergenti in successioni divergenti.

B. ϕ è differenziabile su tutto $\mathbb{C}$; infatti il suo differenziale $d\phi(z_0)$ in un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ è precisamente l'applicazione di $\mathbb{C}$ in se data dalla moltiplicazione per il numero complesso $P'(z_0)$ ove P' indica il polinomio ottenuto derivando formalmente P, ossia:

$$P'(T) = nT^{n-1} + (n-1)a_1T^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$

Infatti calcolando con lettere (ossia *indeterminate*) T,H si ha:

$$P(T+H) = P(T) + P'(T) \cdot H + R(T,H) \cdot H^2$$

ove $R \in \mathbb{C}[T,H]$ è un polinomio. Sostituendo in tale espressione (T,H) con $(z_0,h) \in \mathbb{C}^2$ si ottiene quanto asserito.

Si noti in particolare che $d\phi(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è non solo lineare su $\mathbb{R}$ ma anche lineare su $\mathbb{C}$; funzioni a valori complessi definite su aperti di $\mathbb{C}$ e che hanno questa proprietà saranno nel seguito dette "differenziabili in senso complesso". In particolare al di fuori delle eventuali radici di P', il differenziale di ϕ sarà un isomorfismo e quindi ϕ sarà localmente invertibile.

C. ϕ è surgettiva (evidentemente ciò concluderà la dimostrazione) E' ben noto che ogni polinomio a coefficienti in un corpo che abbia grado positivo, ha un numero finito di radici (al più quanto il suo grado). Ne segue che l'insieme Σ delle radici di P' è finito e che sono finiti anche $\Delta = \phi(\Sigma)$ e $\bar{\Sigma} = \phi^{-1}(\Delta)$. Per restrizione ϕ induce quindi una applicazione ψ di $\mathbb{C} - \bar{\Sigma}$ in $\mathbb{C} - \Delta$ che è localmente invertibile ed ha quindi immagine aperta; inoltre essa è propria (si consideri un compatto in $\mathbb{C} - \Delta$; esso è anche compatto in $\mathbb{C}$ ...) ed ha quindi immagine chiusa. Essendo $\mathbb{C} - \Delta$ connesso tale restizione è surgettiva. In particolare l'immagine di ϕ contiene tutto $\mathbb{C}$ salvo al più l'insieme finito Δ ed è quindi densa in $\mathbb{C}$. Si conclude osservando che ϕ essendo propria (su $\mathbb{C}$) deve avere immagine chiusa. Si può dimostrare che ψ è un rivestimento e verificare che ogni sua fibra ha cardinalità n. La ϕ è invece un esempio di "rivestimento ramificato" di grado n, nozione che viene studiata nell'ambito delle funzioni di più variabili complesse; attribuendo ai punti delle fibre di ϕ una molteplicità, ogni fibra "consiste" di n punti.
Cercheremo ora di generalizzare quanto sopra nel caso di applicazioni differenziabili tra varietà.

Lo studio delle fibre di una applicazione

Sia $f : X \to Y$ una applicazione differenziabile tra varietà; supporremo che f sia propria e che Y sia connessa; per semplificare si può considerare il caso che X sia compatta ma ciò non semplificherà di fatto lo studio che faremo. Le varietà considerate saranno, se non esplicitamente detto, supposte senza bordo. La teoria può essere riformulata per applicazioni $f : X \to Y$ tra varietà a bordo, ma allora si deve fare l'ipotesi che $f^{-1}(\partial Y) = \partial X$.

Siano $p = dim(Y)$ e $n + p = dim(X)$. Se $y \in Y$ è un valore regolare per f, allora $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà compatta (f è propria) di dimensione n che viene detta la *fibra* di f su y e sarà talvolta indicata con X_y.
E' facile vedere che se y_0 è un valore regolare per f, anche i punti di qualche suo

intorno lo sono; ossia i valori regolari di f costituiscono un aperto Ω_f in Y. E' un pò più complicato assicurarsi che tali valori esistono; in effetti Ω_f è un aperto denso come si deduce da un teorema che viene comunemente chiamato lemma di Sard. La dimostrazione che viene data in appendice a queste note di tale teorema è più complicata di quanto avremo bisogno nel seguito. Si consiglia pertanto di esaminare quella riportata in un libretto di J. Milnor dal titolo "Topology from the differentiable viewpoint" nei cui primi cinque paragrafi sono trattati in forma completa i fatti relativi al grado di applicazioni cui qui ora solo accenneremo.

Supponiamo come sopra $f : X \to Y$ differenziabile e propria ed Y connessa (nel libretto di J. Milnor si considera solo il caso che X sia compatta ma le dimostrazioni funzionano automaticamente nel caso più generale). Supponiamo $dim(X) = dim(Y)$; allora la parità della cardinalità (sempre finita) delle fibre di f sui valori regolari è costante ed è detta *grado modulo due* di f. Inoltre se f, g sono omotope, per una omotopia differenziabile a supporto compatto (ossia tutte le applicazioni coincidono fuori di un compatto) allora esse hanno lo stesso grado. Inoltre se X ed Y sono orientate, ad ogni punto regolare $x \in X$ può essere attribuito un segno (secondo che $df(x)$ conservi o no le orientazioni su $T_x(X)$ e $T_{f(x)}(Y)$) allora la somma algebrica dei segni sui punti di una fibra regolare è costante e si ottiene così un intero detto *grado intero* di f; anchesso risulta essere un invariante di omotopia (differenziabile, ma come vedremo avanti è la stessa cosa di quella continua). Un altro risultato per il quale rinviamo al suddetto libretto è quello del punto fisso di Brouwer : ogni applicazione continua del disco chiuso D^n in se ha almeno un punto fisso.

Vedremo poi in queste note un risultato che nel libretto di J. Milnor è trattato nel caso più generale del cobordismo con framing che qui non trattiamo: nel caso $Y = S^n$ ed X connessa orientabile, $f, g : X \to S^n$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado (teorema di Hopf); una dimostrazione verrà riportata nel seguito.

Fibrati

Famiglie di spazi

Sia $p : E \to X$ una applicazione continua tra spazi topologici; per $x \in X$, lo spazio topologico $E_x = p^{-1}(x)$ è detto *fibra* di p su x. Parleremo di p come di una *famiglia di spazi topologici* E_x *su* X o *parametrizzati* da $x \in X$.

Un *morfismo* tra due famiglie $p : E \to X$ e $p' : E' \to X$ sullo stesso spazio X è una applicazione continua $h : E \to E'$ tale che $p = p' \circ h$: penseremo a tale h come ad una famiglia di applicazioni continue $h_x : E_x \to E'_x$ che varia con continuità con $x \in X$. In particolare h sarà detto un *isomorfismo* se esiste un morfismo $k : E' \to E$ tale che $k \circ h$ e $h \circ k$ sono le identità su E , E'. Ciò è chiaramente equivalente a richiedere che h sia un omeomorfismo.

Nel seguito saremo interessati al caso in cui tutte le fibre E_x sono omeomorfe ad uno spazio tipo F fissato; parleremo allora di famiglie di spazi di tipo F. In particolare il prodotto $p : F \times X \to X$ verrà indicato come la famiglia *costante* (di tipo F) e se h è un isomorfismo tra una famiglia $p : E \to X$ e la famiglia costante, diremo che p è una *famiglia banale* o anche un *fibrato banale* ed h sarà detta una *banalizzazione* di esso.

Una famiglia $p : E \to X$ sarà detta un *fibrato a fibra* F, se ogni $x \in X$ stà in un aperto $U \subset X$ sul quale la famiglia è banale; ossia tale che la famiglia $p_{|U} : p^{-1}(U) \to U$ (restrizione di p ad U) sia banale.

Se nelle definizioni precedenti si sostituiscono spazi topologici con varietà differenziabili, applicazioni continue con differenziabili e omeomorfismi con diffeomorfismi, si ottiene la nozione di fibrato differenziabile.

Fibrati con gruppo strutturale

Sia $p : E \to X$ un fibrato a fibra F; ogni fibra E_x per $x \in X$ è omeomorfa ad F ma non è dato alcun omeomorfismo preferenziale: ogni banalizzazione di p su un aperto U che contenga x fornisce in particolare una identificazione tra E_x ed F ma questa dipende appunto dalla banalizzazione considerata e può essere cambiata con un qualsiasi altro omeomorfismo tra E_x ed F. Nella definizione che segue restringeremo tale arbitrarietà.

Un *gruppo topologico* è uno spazio topologico G su cui è data una struttura di gruppo definita da operazioni che sono continue: ossia $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G$ e $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ sono continue. Un *gruppo topologico di omeomorfismi* su uno spazio topologico F è il dato di un gruppo topologico G e di un omomorfismo iniettivo di G nel gruppo degli omeomorfismi di F in se tale che l'applicazione che alla coppia $(g, x) \in G \times F$ associa limmagine $g(x)$ di x secondo l'omeomorfismo associato a g, sia continua.

Se F è una varietà differenziabile, G è un gruppo di Lie e l'applicazione $G \times F \to F$ discussa sopra è differenziabile, diremo di avere un *gruppo di diffeomorfismi* su F.

Sia $p : E \to X$ un fibrato a fibra F e siano $h_i : p^{-1}(U_i) \to U_i$ per $i \in I$ una famiglia di banalizzazioni di E su aperti U_i di X. Per $i, j \in I$, sia $h_{ij}(x)$ l'omeomorfismo di F in se ottenuto "confrontando" le due identificazioni di E_x indotte dalle banalizzazioni h_i e h_j (sostanzialmente $h_{ij}(x)$ è ottenuta componendo h_j con h_i^{-1}); diremo che le due banalizzazioni sono *compatibili* per G se tale omeomorfismo è in G per ogni $x \in U_{ij} = U_i \cap U_j$ e $x \mapsto h_{ij}(x)$ è una applicazione continua (differenziabile se trattiamo fibrati differenziabili) di U_{ij} in G.

Se abbiamo fissato un fibrato $p : E \to X$ a fibra F ed una famiglia di banalizzazioni $h_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ a due a due compatibili e con gli U_i che formino un ricoprimento di X, parleremo di *fibrato a fibra F* e *gruppo strutturale G*: in tal caso una banalizzazione sarà detta *ammissibile* se è compatibile con tutte quelle fissate (evidentemente, come per le varietà differenziabili date attraverso un atlante, due strutture definite come sopra saranno ritenute eguali se le banalizzazioni ammissibili che esse definiscono sono le stesse).

Il caso che nel seguito interesserà maggiormente è il caso in cui F è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e G è il gruppo degli automorfismi lineari di F in se. Se la dimensione di F è p parleremo di *fibrati vettoriali* di rango p (reali o complessi).

Esempi (definizioni...)

19. Sia $\mathcal{M}(n, m)$ lo spazio vettoriale delle matrici ad n colonne e d m righe. Se $\sigma : X \to \mathcal{M}(n, m)$ è una applcazione continua su uno spazio topologico X si consideri l'applicazione $\bar{\sigma} : X \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^m$ definita da $\bar{\sigma}(x, v) = (x, \sigma(x)[v])$. Se rango $\sigma(x) = r$ per ogni $x \in X$, allora $\ker\bar{\sigma} = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^n \ : \ \sigma(x)[v] = 0\}$ è un sottofibrato di $X \times \mathbb{R}^n$ di rango $n - r$ e $\mathrm{Im}\bar{\sigma} = \{(x, \sigma(x)[v]) : (x, v) \in X \times \mathbb{R}^n\}$ è un sottofibrato di rango r di $X \times \mathbb{R}^m$.

Se X è una varietà e σ è differenziabile, allora si ottiene un fibrato vettoriale differenziabile.

20. Siano X uno spazio topologico, $N \in \mathbb{N}$ ed $E \subset X \times \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme; indichiamo con $p : E \to X$ la restrizione della proiezione canonica e per $x \in X$ sia $E_x \subset \mathbb{R}^N$ tale che $p^{-1}(x) = \{x\} \times E_x$. Se E è chiuso in $X \times \mathbb{R}^N$ e se E_x è un sottospazio vettoriale di dimensione p in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in X$, allora $p : E \to X$ è un fibrato vettoriale (continuo). Se poi X è anche una varietà differenziabile ed E è una sottovarietà di $X \times \mathbb{R}^N$, allora esso è un fibrato differenziabile.

21. Per $p \leq n$ interi naturali, $E = \{(H,v) \in \mathcal{G}r(p,n) \times \mathbb{R}^n : v \in H\}$ è un fibrato vettoriale differenziabile sulla grassmanniana $\mathcal{G}r(p,n)$ che viene detto il *fibrato tautologico* (perché la fibra su $H \in \mathcal{G}r(p,n)$ coincide con H).

22. Se $p : E \to X$ è un fibrato vettoriale (continuo) di rango p e $\phi : Y \to X$ è una applicazione continua, posto $E' = \phi^*(E) = \{(y,e) \in Y \times E \ : \phi(y) = p(e)\}$ e detta $p' : E' \to Y$ la restrizione della proiezione canonica, si ottiene un fibrato vettoriale di rango p su Y. Se E è un fibrato vettoriale differenziabile, Y è una varietà e ϕ è differenziabile allora anche E' sarà un fibrato differenziabile.

I fibrati tangente e normale

Proposizione 32 *Se $X \subset \mathbb{R}^N$ una varietà differenziabile di dimensione n,*

$$T(X) = \{(x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ : \ x \in X \ , \ v \in T(X)_x\}$$

è una varietà differenziabile di dimensione $2n$

Dim. Sia $(x_0,v_0) \in T(X)$; essendo X una sottovarietà di $\mathbb{R}^N$, esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^N$ ed una applicazione differenziabile $f : U \to \mathbb{R}^{N-n}$ per la quale 0 sia un valore regolare e tale che $f^{-1}(0) = X \cap U$. E' facile verificare che allora $T(X) \cap (U \times \mathbb{R}^N)$ è il luogo di zeri in $U \times \mathbb{R}^N$ della applicazione

$$U \times \mathbb{R}^N \ni (x,v) \mapsto F(x,v) = (f(x), df(x)[v])$$

La dimostrazione sarà conclusa dalla verifica che $(0,0)$ è un valore regolare per F ossia che ogni (x_0,v_0) è un punto regolare per essa, ossia che il differenziale in tale punto è surgettivo su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Basta quindi osservare che tale differenziale è dato dalla "matrice":

$$dF(x_0,v_0) = \begin{pmatrix} df(x_0,v_0) & 0 \\ ? & df(x_0,v_0) \end{pmatrix}$$

Proposizione 33 *Se $X \subset \mathbb{R}^N$ una varietà differenziabile di dimensione n,*

$$N(X,\mathbb{R}^N) = \{(x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ : \ x \in X \ , \ v \in T(X)_x^{\perp}\}$$

è una varietà differenziabile di dimensione N

*Dim.*Analoga a quella della proposizione precedente; oppure si dimostri in generale che per ogni sottofibrato differenziabile in $X \times \mathbb{R}^N$, il suo "complemento ortogonale " è ancora un sottofibrato differenziabile.

Nota. $T(X)$ sarà detto il *fibrato tangente* ad X e $N(X,\mathbb{R}^N)$ il *fibrato normale* ad X in $\mathbb{R}^N$.

Intorni tubolari

Sia $X \subset \mathbb{R}^N$ una sottovarietà di dimensione n. Per $\epsilon > 0$ poniamo

$D_\epsilon(X) = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ d(x, X) \leq \epsilon\} \qquad N_\epsilon(X) = \{(x, v) \in N(X, \mathbb{R}^N) \ : \ ||v|| \leq \epsilon\}$

e consideriamo l'applicazione differenziabile $\Phi : N(X, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ definita dalla formula $\Phi(x, v) = x + v$.

Teorema 34 *Se X è compatta, esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che per ogni $0 < \epsilon < \epsilon_0$ l'applicazione Φ induce un diffeomorfismo tra le varietà a bordo $N_\epsilon(X)$ e $D_\epsilon(X)$.*

In particolare per ogni $x \in D_\epsilon(X)$ esiste uno ed un solo $r(x) \in X$ tale che $d(x, r(x)) = d(x, X)$ e l'applicazione $r : D_\epsilon(X) \to X$ è un fibrato differenziabile a fibra il disco unitario D^{N-n} in $\mathbb{R}^{N-n}$ e gruppo strutturale il gruppo ortogonale

Dim. Per $y \in \mathbb{R}^N$ indichiamo con $\phi_y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la funzione $\phi_y(x) = ||x - y||^2$. Essendo X compatta, la sua restrizione ad X ha un minimo x_0 e conseguentemente ha differenziale nullo in x_0. Il differenziale di ϕ_y come funzione su $\mathbb{R}^N$ è calcolabile con lo sviluppo:

$$\phi_y(x_0 + h) = ||x_0 + h - y||^2 = ||x_0 - y||^2 + 2 < x_0 - y, h > + ||h||^2$$

che dà : $d\phi_y(x_0)[h] = 2 < x_0 - y, h >$. Quindi la restrizione di ϕ_y ad X ha un punto critico in x_0 se e solo se $x_0 - y = v$ è ortogonale a $T_{x_0}(X)$; in tal caso $(x_0, v) \in N(X, \mathbb{R}^N)$ e $\Phi(x_0, v) = y$. Se $y \in D_\epsilon(X)$ allora $||v|| < \epsilon$ e quindi si è mostrato che $\Phi : N_\epsilon(X) \to D_\epsilon(X)$ è surgettiva per ogni $\epsilon > 0$.

Vediamo ora che per ϵ sufficientemente piccolo, Φ ha differenziabile invertibile in ogni punto di D_ϵ e quindi è una applicazione localmente invertibile. Basterà controllare che ciò è vero nei punti di $X \times \{0\}$ perché allora ciò sarà vero in qualche intorno di $X \times \{0\}$ e quindi su qualche $N_\epsilon(X)$ perché questi ne costituiscono un sistema fondamentale di intorni. Avendo dominio e codominio la stessa dimensione basterà mostrare che per $x \in X$ la Φ ha differenziale surgettivo nel punto $(x, 0)$. Ciò segue immediatamente osservando che lo spazio tangente ad X in x è in tale immagine (perché $\Phi : X \times \{0\} \to X$ è un diffeomorfismo) ed anche il suo ortogonale (perché Φ applica $\{x\} \times T_x(X)^\perp$ con un diffeomorfismo sul sottospazio affine "ortogonale" ad X in x.

Resta quindi da mostrare che per ϵ sufficientemente piccolo, Φ è iniettiva su $\mathbb{N}_\epsilon(X)$. Ragioniamo per assurdo: per ogni n intero positivo, esistono quindi $(x_n, u_n) \neq (y_n, v_n)$ in $N_{1/n}(X)$ sui quali Φ assume gli stessi valori, ossia $x_n + u_n = y_n + v_n$. Per compattezza di X una sottosuccessione degli (x_n) convergerà ad un $x_0 \in X$; siccome u_n e v_n vanno a zero, anche gli y_n tenderanno ad x_0; quindi in ogni intorno di $(x_0, 0)$ vi sono punti distinti (x_n, u_n) e (y_n, v_n) sui quali Φ assume gli stessi valori e ciò contrasta col fatto che in $(x_0, 0)$ la Φ è localmente invertibile.

Per $0 < \epsilon < \epsilon_0$, chiameremo $D_\epsilon(X)$, l'*intorno tubolare* di raggio ϵ di X e $r : D_\epsilon(X) \to X$ sarà detta la *proiezione ortogonale* su X. Si noti inoltre che per tali ϵ, l'insieme $S_\epsilon(X) = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ d(x, X) = \epsilon\}$ è una sottovarietà differenziabile di codimensione uno in $\mathbb{R}^N$ e $r : S_\epsilon(X) \to X$ è un fibrato differenziabile a fibra la sfera di dimensione $N - n - 1$ e gruppo strutturale il gruppo ortogonale.

Altra conseguenza: se $X \subset \mathbb{R}^N$ è una sottovarietà compatta (senza bordo), allora la funzione *distanza da* X è non solo continua su $\mathbb{R}^N$ ma il suo quadrato è differenziabile in un intorno di X.

Confronto tra omotopie differenziabili e continue

Siano X Y due spazi topologici; due applicazioni continue f_0 , $f_1 : X \to Y$ sono dette *omotope* se esiste una applicazione continua $F : X \times [0,1] \to Y$ tale che per $x \in X$ si abbia $F(x,0) = f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$. Chiaramente questa è una relazione di equivalenza sull'insieme delle applicazioni continue di X in Y; lo spazio quoziente associato sarà indicato con $\big[X,Y\big]$.
Se X Y sono varietà differenziabili ed f_0 f_1 sono applicazioni differenziabili di X in Y, esse sono *differenziabilmente omotope* se esiste tra loro una omotopia (come sopra definita) F che sia una applicazione differenziabile. Non è a priori chiaro che questa sia una relazione di equivalenza sull'insieme delle applicazioni differenziabili di X in Y perchè il modo usuale di congiungere due omotopie, non assicura la differenziabilità lungo i punti di congiunzione; tale differenziabilità è però assicurata se congiungiamo omotopie F che sono localmente "costanti" negli estremi di $[0,1]$ nel senso che esiste $\epsilon > 0$ tale che per $x \in X$ e $t \in [0,\epsilon]$ si ha $F(x,t) = F(x,0)$ e $F(x,1-t) = F(x,1)$. A tale tipo di omotopie (differenziabili) ci si può ricondurre considerando una funzione $\rho : [0,1] \to [0,1]$ che sia differenziabile, che valga zero su $[0,1/3]$ ed uno su $[2/3,1]$ ed associando ad una qualsiasi omotopia F la sua "riparametrizzazione" $\tilde{F}$ definita da : $\tilde{F}(x,t) = F(x,\rho(t))$. Quindi si ha una relazione di equivalenza cui è associato un quoziente che indicheremo con $\big[X,Y\big]_\infty$.

Chiaramente si ha una applicazione naturale $\mu : \big[X,Y\big] \to \big[X,Y\big]_\infty$.

Teorema 35 *Se X Y sono compatte l'applicazione μ sopra definita è biunivoca.*

Dim. Possiamo supporre che sia $X \subset \mathbb{R}^N$ ed $Y \subset \mathbb{R}^M$; sia inoltre fissato un intorno tubolare $r : D(Y) \to Y$. Si noti che se f , g sono due applicazioni di X in Y che hanno distanza inferiore ad ϵ (ossia $||f(x) - g(x)|| < \epsilon$ per ogni $x \in X$), allora l'eguaglianza $F(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x)$ definisce una omotopia tra f e g che è inoltre differenziabile se f e g lo sono.

Utilizzando un teorema di approssimazione (di Weierstrass od altro che assicuri l'approssimabilità di funzioni continue su un compatto di $\mathbb{R}^n$ con funzioni differenziabili) si ottiene intanto che μ è surgettiva. Per l'iniettività, se $F : X \times [0,1] \to Y$ è una omotopia continua tra due applicazioni differenziabili f_0 e f_1, si consideri una successione $0 = t_0 < t_1 < ... < t_q = 1$ tale che posto $f_i(x) = F(x,t_i)$ ogni f_i disti meno di $\epsilon/2$ dalla successiva. Approssimando a meno di $\epsilon/2$ ciascuna di esse (per $1 < i < q$) con una applicazione differenziabile, si passa da f_0 ad f_1 con un numero finito di passaggi tra applicazioni differenziabili aventi distanza inferiore ad ϵ e quindi differenziabilmente omotope tra loro; per transitività avremo che f_0 ed f_1 sono differenziabilmente omotope; quindi μ è iniettiva.

Nota. La dimostrazione precedente può essere modificata in modo da non utilizzare la compattezza di Y : sostanzilmente in tale caso più generale, si deve avere un embedding proprio di Y in uno spazio euclideo e si deve riformulare la nozione di intorno tubolare per comprendere il caso di varietà non compatte. Utilizzando teoremi un pò più fini di approssimazione con funzioni differenziabili (ottenibili per esempio da quello di Weierstrass utilizzando partizioni dell'unità) si può fare a meno anche dell'ipotesi che X sia compatto, cosicché il precedente teorema vale per X , Y varietà qualsiasi.

Il teorema di fibrazione

Sia $f : X \to Y$ una applicazione differenziabile propria tra varietà. Se $y_0 \in Y$ è un valore regolare allora la fibra $X_{y_0} = f_{-1}(y_0)$ è una varietà compatta, anzi siccome i valori regolari formano un aperto tutte le fibre X_y per y sufficientemente vicino ad y_0 saranno varietà compatte. Il teorema che ora esporremo, mostra che tali varietà sono tutte diffeomorfe ad X_{y_0}.

Teorema 36 *Sia $f : X \to Y$ una applicazione differenziabile propria e sia $y_0 \in Y$ un suo valore regolare. Esiste un intorno aperto U di y_0 in Y ed un diffeomorfismo $h : f^{-1}(U) \to U \times X_{y_0}$ tale che su $f^{-1}(U)$ si abbia $p \circ h = f$ essendo $p : U \times X_{y_0} \to U$ la proiezione canonica.*

In altri termini l'applicazione $f : f^{-1}(U) \to U$ è diffeomorfa alla proiezione $p : U \times X_{y_0} \to U$

Dim. Si può supporre $Y = \mathbb{R}^p$ e $X \subset \mathbb{R}^N$. Fissiamo un intorno tubolare $r : D_\epsilon(X_0) \to X_0$ di X_0 in $\mathbb{R}^N$ e sia $U \subset \mathbb{R}^p$ un intorno aperto dell'origine tale che $f^{-1}(U) \subset D_\epsilon(X_0)$. Definiamo $h : f^{-1}(U) \to X_0 \times U$ come l'applicazione che applica x in $(r(x), f(x))$. Per costruzione $f = p \circ h$. Resta da mostrare che se U è sufficientemente piccolo, h è un diffeomorfismo. Ciò segue dalle asserzioni seguenti:
a. h induce un diffeomorfismo tra X_0 e $X_0 \times \{0\}$
b. h è localmente invertibile nei punti $x \in X_0$; basterà dimostrare che in tali punti il suo differenziale è surgettivo, perché dominio e codominio hanno la stessa dimensione.
Ed infatti in $h(x) = (x, 0)$, lo spazio tangente ad $X_0 \times \{0\}$ è nell'immagine per quanto detto in a. Considerando ora la proiezione di $X_0 \times U \to U$, l'immagine del differenziale di h contiene il nucleo del differenziale di p e viene applicato surgettivamente sullo spazio tangente in 0 ad U (infatti $p \circ h = f$ e x è un punto regolare per f).

Possiamo quindi supporre, rimpicciolendo eventualmente U che h sia localmente invertibile su tutto $f^{-1}(U)$. Ragionando per assurdo come si è fatto per l'iniettività nel teorema dell'intorno tubolare, si ottiene che:
c. si può supporre che h sia iniettiva.
Resta da mostrare che per U opportuno, h è anche surgettiva. Si noti che h è propria; infatti essa è a valori in un prodotto ed una delle componenti (la f) è propria. Ne segue che $Im(h)$ è un chiuso; ma $Im(h)$ è anche aperto perché h è localmente invertibile e quindi aperta. Quindi $Im(h)$ è una unione di componenti connesse di $X_0 \times U$; se U è connesso, X_0 incontra tutte le componenti connesse di $x_0 \times U$ ed essendo $X_0 \subset Im(h)$, si avrà $IM(h) = X_0 \times U$.

Varietà quasi complesse

Sia V uno spazio vettoriale reale; una applicazione lineare $J : V \to V$ tale che $J^2 = -I$, ove I indica l'identità su V, sarà detta una *struttura complessa* su V. Fissata una tale J si può definire una moltiplicazione $\mathbb{C} \times V \to V$ con la formula:

$$(x + iy) \cdot v = x \cdot v + y \cdot (Jv)$$

ed in tal modo V diviene uno spazio vettoriale complesso.

Viceversa ogni spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale reale su cui è fissato un endomorfismo (la moltiplicazione per $i = \sqrt{-1}$) il cui quadrato è meno l'identità.

Una *varietà quasi complessa* è una varietà differenziabile X ove per ogni $x \in X$ è stata fissata una struttura complessa J_x su $T_x(X)$ che "varia differenziabilmente" nel senso che l'applicazione $J : T(X) \to T(X)$ definita da $J(x, v) = (x, J_x(v))$ è differenziabile.

Una applicazione $f : X \to Y$ tra varietà quasi complesse è detta *olomorfa* se è differenziabile e se $df(x) : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ è $\mathbb{C}$-lineare per ogni $x \in X$.

Esempi (...) 23. Sia $X \subset \mathbb{R}^N$ una sottovarietà orientata di dimensione due. Ogni $T_x(X)$ per $x \in X$ è uno spazio vettoriale orientato di dimensione due su cui è fissato un prodotto scalare definito positivo (in quanto sottospazio di $\mathbb{R}^N$). Su esso ha senso quindi parlare di "rotazione di angolo α; scegliendo come struttura complessa la rotazione di $\pi/2$ si ottiene una struttura quasi complessa su X.

24. $\mathbb{C}^N$ è in modo naturale una varietà quasi complessa. Si verifica facilmente che le applicazioni polinomiali di $\mathbb{C}^N$ in $\mathbb{C}^M$ sono olomorfe; anzi che il loro differenziale in un punto è precisamente l'applicazione $\mathbb{C}$-lineare indotta dalla matrice costituita dalle derivate formali (in quanto polinomi) dei polinomi componenti: basterà calcolarli in $z_1 + h_1, \ldots, z_N + h_N$ e sviluppare i binomiali che ne risultano.

Anzi, se $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ è un aperto e P, Q sono polinomi in N variabili con Q mai nullo in Ω, allora P/Q rappresenta una applicazione olomorfa di Ω in $\mathbb{C}$. Per dimostrarlo è sufficiente dimostrare che l'applicazione di $\mathbb{C}^*$ in se definita da $z \mapsto z^{-1}$ è olomorfa.

25. Una varietà complessa è una varietà quasi complessa che sia localmente biolomorfa ad aperti di $\mathbb{C}^n$. Ad esempio lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n = \{$rette per l'origine in $\mathbb{C}^{n+1}\}$ è una varietà complessa. Si dimostri che se $P(Z_0, \ldots, Z_n)$ è un polinomio omogeneo di grado d in $n+1$ variabili, il suo luogo di zeri $X = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}^n : \ P(z) = 0\}$ è una sottovarietà complessa di $\mathbb{P}^n$ se in ogni suo punto almeno una delle derivate formali $\partial P/\partial z_i$ è diversa da zero.
In tal caso X sarà detta una *ipersuperficie di grado d* in $\mathbb{P}^n$.

26. In modo analogo si definiscono i *gruppi di Lie complessi*, grassmanniane, ed anche varietà complesse ottenute per quoziente di altre, ad esempio :

a. se Γ è un sottogruppo discreto in $\mathbb{C}^n$, allora $\mathbb{C}^n/\Gamma$ possiede una ovvia struttura di varietà complessa.

b. Sia Γ il gruppo di biolomorfismi di $\mathbb{C}^n$ in se generato da $A \in \mathcal{G}l(n, \mathbb{C})$. Se $|\omega_i| \neq 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, allora $\mathbb{C}^n - \{0\}/\Gamma$ è una varietà complessa.

Nota. Si può dimostrare che ogni varietà quasi complessa di dimensione due è una varietà complessa. Per dimensioni maggiori (quattro o più) ciò non accade: devono essere verificate alcune condizioni non banali dette di *integrabilità*, necessarie e sufficienti affinché una data struttura quasi complessa sia complessa. Questo risultato non è affatto banale; è invece facile dimostrarlo se si suppone che le strutture di varietà differenziabile e quella della struttura quasi complessa siano analitiche reali. Discuteremo di ciò nella parte di variabile complessa.

Teorema 37 *Sia $f : X \to Y$ una applicazione olomorfa propria tra varietà quasi complesse. Se Y è connessa, l'insieme Ω dei valori regolari di f è un aperto denso connesso. Di conseguenza le fibre di f sui valori regolari sono tutte diffeomorfe tra loro*

Dim. Che Ω sia un aperto denso deriva dal teorema di Sard più il fatto che f è propria. Per dimostrare che è connesso si noti che per ogni punto critico $x \in X$, l'applicazione $df(x) : T_x(X) \to T_f(x)(Y)$, essendo $\mathbb{C}$-lineare per le strutture complesse esistenti su tali spazi e non essendo surgettiva, avrà immagine un sottospazio complesso che dal punto di vista reale avrà codimensione almeno due; la dimostrazione viene allora conclusa dal seguente teorema.

Teorema 38 *Sia $f : X \to Y$ differenziabile e propria. Sia $C = \{x \in X\ :\ df(x)$ ha immagine di codimensione almeno due $\}$ e sia $C' = f(C)$. Allora per ogni aperto Ω connesso non vuoto in Y, anche $\Omega - C'$ è un aperto non vuoto connesso*

Dim E' chiaro che C è chiuso e quindi anche C' lo è perché f è propria; inoltre, essendo C' fatto di punti critici, per il lemma di Sard non ha parte interna. Quindi $\Omega - C'$ è un aperto non vuoto. Dobbiamo mostrare che è connesso.

Esaminiamo dapprima il caso $Y = \mathbb{R}^{n+1}$. Consideriamo la proiezione p di $\mathbb{R}^{n+1}$ sullo spazio $\mathbb{R}^n$ delle ultime n coordinate e sia D l'insieme dei valori critici di $p \circ f$. Se $y \in \mathbb{R}^n$ non è in D, allora per ogni $x \in X$ con $f(x) = y$, l'immagine di $d(p \circ f)$ ha dimensione n e quindi l'immagine di $df(x)$ ha codimensione maggiore o eguale ad n; ciò significa che nessun tale x può appartenere a C'. In definitiva per quasi tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$ si ha $p^{-1}(x) \cap C' = \emptyset$.

Siano ora x, y due punti di $\mathbb{R}^n - C'$;cambiando coordinate in $\mathbb{R}^{n+1}$ di modo che il primo vettore di base sia un multiplo di $x - y$, si ottiene l'esistenza di una retta parallela ad $x - y$ e passante vicino quanto si vuole ad x ed a y e che non incontra C'; siccome C' è un chiuso si può fare in modo che tale retta incontri palle di centri in x ed in y che siano disgiunte da C' ed è così chiaro che x ed y sono congiungibili da un cammino che non incontra C'.

Torniamo ora al caso generale; sappiamo quindi che in ogni punto $x \in \Omega$ se prendiamo una palla P di centro x e contenuta in Ω, essendo P diffeomorfa ad un $\mathbb{R}^{n+1}$ e considerando l'applicazione $f : f^{-1}(P) \to P$,si ha che $P - C'$ è connesso. In altri termini sappiamo che C' non sconnette localmente Ω. Se per assurdo fosse $\Omega - C'$ sconnesso, esisterebbero due aperti non vuoti disgiunti A, B con $A \cup B = \Omega - C'$; essendo C' privo di parte interna, le chiusure (fatte in Ω) di A e B avrebbero unione tutto Ω e quindi ,essendo questo connesso, dovrebbero incontrarsi in almeno un punto x: se P è una palla di centro x e contenuta in Ω si ha che $A \cap C'$ e $B \cap C'$ sono non vuoti e quindi $P - C'$ è sconnesso, contrariamente a quanto mostrato prima. Quindi Ω è connesso e ciò conclude la dimostrazione.

Teoremi di isotopia

Siano X, M varietà differenziabili, X compatta. Una applicazione differenziabile $f : X \to M$ è detta un *embedding* se rappresenta un diffeomorfismo tra X e una sottovarietà $f(X)$ di M. Per la compattezza di X, ciò equivale a richiedere che f sia differenziabile, iniettiva e abbia differenziale iniettivo in ogni punto di X.

Due embeddings sono detti *isotopi* se esiste $F : X \times [0,1] \to M$ tale che utilizzando la notazione $F(x,t) = F_t(x)$ si abbia che $F_0 = f_0, F_1 = f_1$ e F_t è un embedding per ogni $t \in [0,1]$. E' facile verificare che ciò equivale a richiedere che l'applicazione $X \times [0,1] \to M \times [0,1]$ definita da $(x,t) \to (F(x,t),t)$ è un embedding. Una tale F è detta una *isotopia* tra f_0 e f_1. Diremo invece che f_0, f_1 sono *fortemente isotopi* se esiste $\Phi : M \times [0,1] \to M$ differenziabile e tale che:

(1) per ogni $t \in [0,1]$ Φ_t è un diffeomorfismo di M in se

(2) esiste un compatto K in M tale che per $x \notin K$ e $t \in [0,1]$ sia $\Phi(x,t) = x$

(3) Φ_0 è l'identità di M in se.

(4) $f_1 = f_0 \circ \Phi_1$.

In altre parole si richiede che l'applicazione definita da $(x,t) \to (\Phi(x,t),t)$ sia un diffeomorfismo di $M \times [0,1]$ in se che è l'identità su $M \times [0,1]$ e fuori di un compatto in $M \times [0,1]$ e tale che il diffeomorfismo indotto da $M \times [0,1]$ in se trasformi f_0 in f_1.

Teorema 39 *Siano f_0 , f_1 : $X \to M$ embeddings della varietà compatta X. Esse sono isotope se e solo se sono fortemente isotope.*

dim.$\Leftarrow$ è facile: data Φ la formula $F(x,t) = \Phi(f_0(x,t),t)$ definisce l'isotopia tra f_0 e f_1.

$\Rightarrow$ Data F l'applicazione $G : (x,t) \to (F(x,t),t)$ è un embedding in $M \times [0,1]$. Possiamo al solito supporre, per non avere problemi al bordo di $M \times [0,1]$ che F non dipenda localmente da t all'intorno di $X \times \{0\}$ e di $X \times \{1\}$ cosicché G può essere pensata come una applicazione di $X \times \mathbb{R}$ in $M \times \mathbb{R}$.

Consideriamo su $X \times \mathbb{R}$ il campo tangente costante $S = (0,1) \in T(X \times \mathbb{R}) \equiv T(X) \oplus T(\mathbb{R})$ e sia S' il campo tangente a $Y = G(X \times \mathbb{R})$ immagine di S' tramite il differenziale di G.

Mostreremo ora l'esistenza di un campo di vettori tangenti T su $M \times \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà: (1) $T(x,t) = (v(x,t),1)$ e quindi le curve integrali di T sono del tipo $(a(x,t),t)$

(2) T è una estenzione di S' .

Il flusso associato a tale campo fornirà allora la Φ cercata.

Che un tale T esista si dimostra osservando che in generale ogni campo tangente ad una sottovarietà (come Y) è localmente estendibile ad un campo tangente all'ambiente (nel nostro caso $M \times \mathbb{R}$), perché localmente esistono sistemi di coordinate locali nei quali l'ambiente è un prodotto della sottovarietà per uno spazio euclideo. Sia quindi $(T_i)_{i \in I}$ una famiglia di estenzioni locali di S' definite su un ricoprimento localmente finito $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di un intorno aperto di Y in $M \times \mathbb{R}$. Si può supporre che tali estenzioni abbiano la seconda componente mai nulla. Completiamo tale situazione ad un ricoprimento di tutto $M \times \mathbb{R}$ considerando sul complementare di Y il campo costante $(0,1)$. Incolliamo tra loro tali campi utilizzando una partizione dell'unità; il campo ottenuto è quasi quello cercato: gli manca solo di avere la seconda componente 1; ma essendo per costruzione tale componente mai nulla, esso può essere diviso per essa ed il risultato sarà quello cercato.

Nota Quanto visto sopra vale anche (con dimostrazione analoga) nel caso che X sia una varietà a bordo.

Unicità dei dischi

Sia D^p il *p-disco standard* (= disco unitario chiuso in $\mathbb{R}^n$). Un p-disco in una varietà M è per definizione un embedding di D^p in M. Due p-dischi sono detti equivalenti se sono isotopi come embeddings.

Teorema 40 *Sia M una varietà connessa di dimensione n . Se $p < n$ o M è non orientabile, vi è una sola classe di p-dischi in M; altrimenti si hanno esattamente due classi, distinte dalle orientazioni che essi inducono su M.*

dim. gSia $f : D^p :\rightarrow M$ un embedding. Se $0 < a < 1$ la formula $F(x,t) = f((1 + t(a - 1))x)$ definisce una isotopia tra f e la sua "restrizione" al disco di raggio a. Scelto un intorno di $f(0)$ in M diffeomorfo ad $\mathbb{R}^n$, siamo così ricondotti ad esaminare il caso $M = \mathbb{R}^n$ e potremo anche supporre che sia $f(0) = 0$. Sviluppando f si ha: $f(x) = df(0)[x] + R(x)[x]$ ove $R(x)$ è un polinomio di grado due (da $\mathbb{R}^n$ in se); quindi $f(tx) = df(0)[tx] + R(tx)[tx] = tdf(0) + t^2R(tx)[x]$ dividendo per t si ottiene che $df(0)[x] + tR(tx)[x]$ è una isotopia tra gli embeddings f e $df(0)$. La dimostrazione del teorema viene ora facilmente conclusa utilizzando le proprietà di connessione di $\mathcal{G}l(n,\mathbb{R})$ e la connessione di M.

Unicità degli intorni tubolari

Sia X una sottovarietà compatta di una varietà M. Il *fibrato normale* di X in M è (se M è una sottovarietà d'uno spazio euclideo V) $\mathcal{N}(X,M) = \{(x,v) \in V : v$ è tangente a M in x e ivi ortogonale a $X\}$ (se M è una varietà astratta, può essere definito come il "quoziente" del fibrato tangente ad M ristretto ad X modulo il fibrato tangente ad X).

Per $\epsilon > 0$ sia $D_\epsilon = \{(x,v) \in \mathcal{N}(X,M) : \|v\| \le \epsilon\}$. Per definizione un *intorno tubolare di X in M* è un embedding f di D_ϵ in M il cui differenziale nei punti $(x,0)$ sia "l'identità" (nel caso astratto si richiede che tale differenziale induca un supplementare del tangente di X nel tangente ad M). Si dimostra poi, nello stesso modo dei dischi (che rappresentano il caso in cui X è ridotto ad un punto) il teorema di unicità seguente :

Teorema 41 *Se f_0, f_1 sono due intorni tubolari di X in M, esiste un diffeomorfismo h di M in se (isotopo all'identità per una isotopia a supporto compatto) tale che $f_1 = h \circ f_0$.*

In particolare se $\Delta \subset X$ è una sottovarietà con fibrato normale banalizzato da un framing, non solo esistono embeddings $\sigma : \Delta \times D_p \rightarrow X$ tali che $\sigma(\Delta \times \{0\}) = \Delta$ e il cui differenziale induca il framing dato ma anche ogni due tali embeddings sono fortemente isotopi; in particolare le mappe ottenute a partire da tali embeddings per costruzione di Pontrjagin sono omotope.

Trasversalità

Due sottovarietà X , Y di una varietà M sono dette *trasversali* in $x \in M$ se $x \notin X \cap Y$ oppure se $x \in X \cap Y$ e si ha:

$$T(X)_x + T(Y)_x = T(M)_x$$

Diremo che esse sono *trasversali* se lo sono in ogni punto di X.

Tale proprietà è equivalente alla seguente: per ogni aperto $U \subset M$, se $f : U \to \mathbb{R}^p$ e $g : U \to \mathbb{R}^q$ sono equazioni di definizione per $X \cap U$ e $Y \cap U$, allora $(f, g) : U \to \mathbb{R}^{p+q}$ è una equazione di definizione per $X \cap Y$; in particolare se X , Y sono trasversali, allora $X \cap Y$ è una sottovarietà avente per codimensione la somma delle codimensioni di X e di Y.

Questa nozione di trasversalità è un caso particolare della seguente: una applicazione differenziabile $\phi : X \to M$ è detta *trasversale* in $x \in X$ ad una sottovarietà $Y \subset M$ se $\phi(x) \notin Y$ oppure se:

$$Im(d\phi(x)) + T(Y)_{\phi(x)} = T(M)_x$$

e diremo che ϕ è trasversale ad Y se lo è in ogni $x \in X$.

Tale proprietà è equivalente alla seguente: per ogni aperto $U \subset M$, se $g : U \to \mathbb{R}^q$ è una equazione locale di definizione per $Y \cap M$, allora $g \circ \phi$ è una equazione di definizione per $\phi^{-1}(Y)$ (sull'aperto $\phi^{-1}(U)$). In particolare $\phi^{-1}(Y)$ è una sottovarietà di X avente in X la codimensione che Y ha in M.
Se X è una sottovarietà di M e ϕ è l'inclusione di X in M si riottiene la definizione precedente.

Si può ulteriormente generalizzare la nozione di trasversalità alla situazione seguente: siano $\phi : X \to M$ e $\psi : Y \to M$ due applicazioni differenziabili; diremo che esse sono trasversali in $(x, y) \in X \times Y$ se o $\phi(x) \neq \psi(y)$ oppure se $\phi(x) = \psi(y) = z$ e si ha:

$$Im(d\phi(x)) + Im(d\psi(y) = T(M)_z$$

Diremo che ϕ e ψ sono *trasversali* se lo sono in tutti gli $(x, y) \in M$; ciò equivale ad asserire che per ogni diffeomorfismo h di un aperto $U \subset M$ in $\mathbb{R}^n$, l'applicazione $\phi \circ h - \psi \circ h$ è una equazione di definizione per una sottovarietà di $\phi^{-1}(U) \times \psi^{-1}(U)$. In particolare se ϕ e ψ sono trasversali, il loro *prodotto fibrato* definito da:

$$X \times_M Y = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ \phi(x) = \psi(y)\}$$

è una sottovarietà di $X \times Y$ avente dimensione $dim(X) + dim(Y) - dim(M)$.
Se g è una inclusione, si ricade nel caso precedente.

Formuleremo ora alcuni teoremi di trasversalità; essi precisano il significato di affermazioni del tipo: "ogni due sottovarietà di una varietà possono essere spostate di poco quanto si vuole in modo da renderle trasversali" ; od anche: "genericamente due applicazioni $f : X \to Z$ e $g : Y \to Z$ sono trasversali".

Per dare a tali frasi un significato matematico preciso introduciamo delle topologie sugli spazi $\mathcal{E}(X, Y)$ delle applicazioni differenziabili di X in Y, sugli spazi $A_p(X)$ delle sottovarietà compatte di dimensione p in X ecc. .

Topologie su $\mathcal{E}(X,Y)$. Procediamo per gradi:

A. X compatta e $Y = \mathbb{R}$. Fissato $k \in \mathbb{N}$ introduciamo sullo spazio vettoriale $\mathcal{E}^k(X) = \mathcal{E}^k(X,\mathbb{R})$ delle funzioni di classe C^k su X una struttura di spazio di Banach nel modo seguente: fissiamo una famiglia finita (U_i, h_i) , $i = 1, \ldots N$ di carte differenziabili su X e compatti $K_i \subset U_i$ tali che $\bigcup_1^N K_i = X$. Per $f \in \mathcal{E}^k(X)$, sia $||f||_i$ l'estremo superiore delle derivate di ordine al più k, calcolate per $x \in K_i$, della funzione f "letta" tramite la carta $i-$esima.

Allora ogni $|| \ ||_i : \mathcal{E}^k(X) \to \mathbb{R}$ è una seminorma e la somma $|| \ ||$ delle $|| \ ||_i$ per $i = 1, \ldots, N$ è una norma su $\mathcal{E}^k(X)$. Segue facilmente da teoremi di Analisi che si ottiene in effetti uno spazio di Banach.

Per dimostrare che la topologia di $\mathcal{E}^k(X)$ non dipende dalle scelte fatte (le carte (U_i, h_i) e i compatti K_i), basterà mostrare che aggiungendo un ulteriore carta (U, h) e compatto $K \subset U$, la norma che si ottiene è equivalente alla precedente. Ciò può essere fatto in due modi:
1. Si osserva che le derivate di una $f \in \mathcal{E}^k(X)$ fatte nella carta h sono esprimibili (in modo più o meno complicato) in funzione delle derivate di f fatte sulle carte del ricoprimento di partenza e ciò fornisce una maggiorazione della nuova norma in funzione della vecchia.
2. Si utilizza il teorema sugli spazi di Banach detto della applicazione aperta.

Essendo $\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{E}^k(X)$, esso sarà dotato talvolta della topologia indotta: parleremo di topologia C^k su $\mathcal{E}(X)$. Ovviamente essendo $\mathcal{E}^k(X, \mathbb{R}^N) \simeq \oplus_1^N \mathcal{E}^k(X)$ sarà anchesso dotato di una struttura di spazio di Banach.
Analogamente parleremo di topologia C^k su $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^N)$.

B. X compatta e Y sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^N$. Si noti che $\mathcal{E}^k(X,Y)$ è un sottospazio chiuso dello spazio di Banach $e^k(X, \mathbb{R}^N)$ e di conseguenza risulta dotato di una struttura di spazio metrico completo.

Si può dimostrare che cambiando l'embedding di Y in uno spazio euclideo, la topologia su $\mathcal{E}^k(X,Y)$ non cambia. Infatti la topologia su tale spazio può essere descritta dandone esplicitamente una base di intorni tipo :
sia $f \in \mathcal{E}^k(X,Y)$; fissate carte $(U_1, h_1), \ldots, (U_N, h_N)$ su X e $(V_1, k_1) \ldots, (V_N, k_N)$ su Y tali che $f(U_i) \subset V_i)$ per ogni i e fissati compatti $K_i \subset U_i$ ed un $\epsilon > 0$, si consideri l'insieme di tutte le $g \in \mathcal{E}^k(X,Y)$ tali che per ogni i sia $g(K_i) \subset V_i$ ed ogni derivata di ordine al più k nei punti di K_i della g espressa tramite le carte (U_i, h_i) er (V_i, k_i) sia minore di ϵ; questi insiemi costituiscono un sistema fondamentale di intorni di f per la topologia C^k.
Naturalmente lo spazio $\mathcal{E}(X,Y)$ non è chiuso in $\mathcal{E}^k(X,Y)$ e quindi non ha una struttura di spazio metrico completo. Si può rimediare a ciò utilizzando la nozione di spazio di Frechet.

Topologia delle varietà algebriche

Sia $F(x_0, \ldots, x_n)$ un polinomio omogeneo di grado p in $n+1$ variabili e sia $X = \{(x) \in \mathbb{P}^n : F(x) = 0\}$. Diremo che F è regolare in $x \in X$ se esiste $i \in \{0, \ldots, n\}$ tale che la derivata formale $\partial F / \partial x_i(x)$ è non nulla in x.

Lemma 42 *Se F è regolare in $\bar{x} \in X$, esiste un intorno aperto U di $\bar{x}$ in $\mathbb{P}^n$ tale che $X \cap U$ è una varietà differenziabile di dimensione $n-1$.*

Dim. Una almeno delle componenti di $\bar{x}$ è non nulla; sia essa la prima. Quindi $\bar{x} \in U_0 = \{(x) \in \mathbb{P}^n : x_0 \neq 0\}$; su U con coordinate non nomogenee $x_1, \ldots, x_n$, il polinomio $P(x_1, \ldots, x_n) = F(1, x_1, \ldots, x_n)$ è una funzione olomorfa che ha per luogo di zeri $X \cap U_0$. Per il teorema di Eulero $p \cdot F(x) = \sum_0^n x_i \partial F/\partial x_i$; se $F(\bar{x}) = 0$, non possono annullarsi in $\bar{x}$ tutte le derivate formali $\partial F/\partial x_i$ con $i > 0$, perché allora anche $\partial F/\partial x_0$ si annullerebbe in $\bar{x}$. Ne segue che OP ha in $\bar{x}$ almeno una derivata non nulla e l'enunciato segue da un teorema di funzioni implicite.

Oss. Sempre utilizzando il teorema di Eulero si dimostra che un luogo di zeri in $\mathbb{P}^n$ di r polinomi omogenei (di vari gradi) è una varietà differenziabile di dimensione $n - r$ all'intorno di un punto $\bar{x}$, se la marice delle derivate formali di tali polinomi rispetto alle variabili omogenee di $\mathbb{P}^n$ calcolate in $\bar{x}$ ha rango r; in tal caso diremo anche che tali polinomi sono *funzionalmente indipendenti* in $\bar{x}$.

Inoltre questi risultati si estendono senza fatica al caso di polinomi multiomogenei: ad esempio se $F(x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_m)$ è un polinomio che è omogeneo di grado p nelle x_i e omogeneo di grado q nelle y_j, risulta ben definito il suo luogo di zeri X in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ed esso è una varietà differenziabile di dimensione $n+m-1$ all'intorno di $\bar{x}$, se almeno una delle derivate formali $\partial F/\partial x_i$ o $\partial F/\partial y_j$ è non nulla in $\bar{x}$.

Chiameremo *ipersuperficie liscia* di grado p in $\mathbb{P}^n$ ogni $X \subset \mathbb{P}^n$ che sia il luogo di zeri di un polinomio omogeneo di grado p in $n + 1$ variabili che è regolare in ogni punto di X.

Se X è il luogo di zeri in $\mathbb{P}^n$ di polinomi omogenei $F_1, \ldots, F_r$ rispettivamente di gradi $p_1, \ldots, p_r$ funzionalmente indipendenti in ogni punto di X, esso verrà chiamato una *intersezione completa* di dimensione $n - r$ e *multigrado* $(p_1, \ldots, p_r)$. Analoghe definizioni nel caso multiomogeneo.

Siano $\mathbb{P}$ lo spazio proiettivo associato allo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado p in $n + 1$ variabili, $W = \{(F, x) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}^n : F(x) = 0\}$ e $\sigma : W \to \mathbb{P}$, $\tau : W \to \mathbb{P}^n$ le restrizioni delle proiezioni naturali.

Teorema 43
a) W è una ipersuperficie liscia in $\mathbb{P} \times \mathbb{P}^n$
b) Un punto $(F, x) \in W$ è critico per σ se e solo se il polinomio F non è regolare in x
c) Se $F \in \mathbb{P}$ è regolare per σ, allora τ induce un biolomorfismo tra $\sigma^{-1}(F)$ e l'ipersuperficie luogo di zeri di F in $\mathbb{P}^n$

Dimostrazione: a) W è il luogo di zeri in $\mathbb{P} \times \mathbb{P}^n$ del polinomio (notazioni multiindici) $\sum_{|I|=p} a_I x^I$ che è omogeneo di grado p nelle x_i e di grado 1 nelle a_I; le sue derivate formali rispetto alle a_I sono i monomi x^I che non possono essere tutti nulli in alcun punto di $\mathbb{P}$.

b) , c) sono lasciati per esercizio suggerendo di esprimere la situazione in termini di coordinate non omogenee (che servono da coordinate locali).

Equazioni di sottovarietà

Sia Y una sottovarietà di codimensione p della varietà $n-$dimensionale X. Una *equazione (o sistema di equazioni) per Y* è una $\phi : X \to \mathbb{R}^p$ differenziabile, tale che 0 sia un valore regolare per ϕ e $\phi^{-1}(0) = Y$. Una condizione (ovviamente) necessaria per l'esistenza di una tale equazione è che Y sia chiusa in X ; semplici esempi mostrano che ciò non è sufficiente (ad esempio $X = S^1$ e Y costituita da un solo punto. Oppure si osservi che se X è orientabile, ogni $Y \subset X$ che ha una equazione è pure orientabile; in particolare nessuna sottovarietà non orientabile in $\mathbb{R}^n$, come ad esempio gli spazi proiettivi reali di dimensione pari, può avere una equazione. E' più complicato dimostrare che neppure $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ o $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ possono avere equazioni in alcun $\mathbb{R}^n$ ove siano realizzate).

Tratteremo ora l'esistenza di equazioni nel caso che Y abbia codimensione uno. Utilizzeremo il seguente lemma, facile conseguenza del teorema di divisione elementare:

Lemma 44 *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ con f una equazione per l'ipersuperficie $Y \subset X$ e g differenziabile e nulla su Y. Allora esiste (unica) una funzione differenziabile $h : X \to \mathbb{R}$ tale che $g = hf$. Se anche g è una equazione per Y allora h non ha zeri.*

dim. Su $X - Y$ la h deve essere necessariamente g/f che è ivi differenziabile; verifichiamo che essa è estendibile ad una funzione differenziabile su X. Siccome Y è privo di parte interna, le eventuali estenzioni continue sono univocamente determinate; quindi è sufficiente mostrare la locale estendibilità differenziabile nei punti di Y. Ma leggedo localmente all'intorno di un punto di Y tramite un opportuno sistema di coordinate, la f diviene la prima coordinata x_1 e g una funzione nulla per $x_1 = 0$ e la dimostrazione è conclusa applicando il teorema di divisione elementare.

Il lemma precedente non ha analoghi nel caso di codimensione maggiore di uno (almeno così semplici e generali) ed in effetti l'esistenza di equazioni diviene in tal caso un problema molto più complicato.

Teorema 45 *Sia X una varietà differenziabile connessa e sia $\Pi = \pi_1(X, x_0)$ per qualche $x_0 \in X$. Sono fatti equivalenti:*
- Ogni ipersuperficie (=sottovarietà di codimensione uno) di X ha una equazione
- $\mathcal{H}om(\Pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$

La dimostrazione richiederà l'introduzione di alcuni nuovi concetti; cominceremo a svilupparla ora ma la concluderemo nei prossimi paragrafi.
($2 \Longleftarrow 1$) Sia Y una ipersuperficie chiusa in X ; ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U sul quale $Y \cap U$ ha una equazione. Esistono quindi un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in U}$ di X e per ogni $i \in I$ una equazione $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ per $U \cap Y$. Per il lemma precedente $f_i/f_j = f_{ij}$ è una funzione differenziabile mai nulla su $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Mostreremo nel successivo paragrafo sui ricoprimenti semplici che possiamo supporre:
Ipotesi: per ogni $i, j \in I$ se $U_{i,j}$ è non vuoto, allora è contrattile; in particolare è connesso e semlicemente connesso
Allora $f_{i,j}$ su $U_{i,j}$ ha un segno costante che indichiamo con $\epsilon_{i,j} \in \{+1, -1\}$. Notiamo che per come costruite le $f_{i,j}$, se i, j, k sono tali che $U_{i,j,k} = U_i \cap U_j \cap U_k$ è non vuoto, allora $f_{i,j} f_{j,k} = f_{i,k}$ come funzioni su $U_{i,j,k}$ e di conseguenza $\epsilon_{i,j}\epsilon_{j,k} = \epsilon_{i,k}$. Supponiamo per il momento che ogni ϵ sia $+1$.
scelta una partizione dell'unità $(\phi_i)_{i \in I}$, la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ definita da $f = \sum_{i \in I} f_i \phi_i$ è una equazione per Y perchè le f_i hanno tutte lo stesso segno nei punti fuori di Y e nei punti di Y le df_i "puntano" tutte dalla stessa parte

rispetto allo spazio tangente ad Y e df , che è una loro combinazione baricentrica, è sicuramente non nullo. Quindi il problema di costruire una equazione per Y , è ricondotto a quello di poter aggiustare i segni nel senso seguente: sia fissato per ogni $i \in I, \epsilon_i \in \{+1, -1\}$; le funzioni $\tilde{f}_i = \epsilon_i f_i$ sono evidentemente equazioni per le $Y \cap U_i$. Esse possono essere ben incollate con una partizione dell'unità come sopra (ossia le f_i/f_j sono tutte positive), se valgono le relazioni $\epsilon_{i,j} = \epsilon_i/\epsilon_j$ per ogni $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j$ sia non vuoto.

Le condizioni affinchè tali ϵ_i esistano saranno determinate nel paragrafo sulla descrizione formale del gruppo fondamentale , il che concluderà questa parte della dimostrazione. Per quanto riguarda ($1 \Longrightarrow 2$) dovremo attendere il paragrafo sui fibrati vettoriali.

Buoni ricoprimenti

Nel passaggio da soluzioni locali a soluzioni globali è spesso utile e talvolta necessario, conoscere l'esistenza di ricoprimenti aperti arbitrariamente fini, tali che non solo ogni aperto del ricoprimento sia "semplice "per il problema che stiamo trattando, ma anche ogni intersezione finita di essi lo sia.

Nel caso in esame definiamo *semplice* un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ di uno spazio topologico X se:
(1) è localmente finito
(2) se $i_0, \cdots, i_p \in I$ sono tali che $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p} \neq 0$, allora tale aperto è contrattile.
Chiameremo invece *buono* un ricoprimento aperto di X se è semplice ed inoltre si ha :
(3) se $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p} \neq 0$ allora $U_{i_0} \cup \cdots \cup U_{i_p}$ è contrattile.

Nel seguito, trattando di varietà differenziabili, intenderemo che il termine "contrattile" nelle definizioni precedenti significhi "diffeomorfo ad $\mathbb{R}^n$".

Proposizione 46 *Se X è aperto di $\mathbb{R}^n$, esso ha ricoprimenti buoni arbitrariamente fini.*

dim. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Costruiamo un ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ di X che è buono e più fine di $\mathcal{U}$ nel modo seguente. Fissiamo una famiglia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di compatti di $\mathbb{R}^n$ che ricoprano X ed ognuno dei quali sia contenuto nella parte interna del successivo. Allora per $n \geq 2$, $K_{n+1} - \overset{\circ}{K}_n$ è coperto da un numero finito di palle aperte $\mathcal{U}-$piccole (cioè contenute in qualche elemento di $\mathcal{U}$) e contenute in $\overset{\circ}{K}_{n+2} - K_{n-1}$. E' chiaro come in questo modo si possa costruire un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ di X localmente finito, più fine di $\mathcal{U}$ e tale che se $V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_p} \neq 0$ allora esso e $V_{i_0} \cup \cdots \cup V_{i_p}$ sono aperti stellati (rispetto a qualche loro punto) limitati in $\mathbb{R}^n$. La dimostrazione è quindi conclusa dal seguente:

Lemma 47 *Ogni aperto stellato limitato $V \subset \mathbb{R}^n$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$*

dim. supponiamo che V sia stellato in $0 \in \mathbb{R}^n$.

Asserzione 1 : esiste una successione (ϕ_n) di funzioni differenziabili su S^{n-1} tali che :
1. per ogni n sia $0 < \phi_n < \phi_{n+1}$
2. l'unione dei $V_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \phi_n(x/\|x\|)\}$ è tutto V.

Dimostriamo l'asserto. Sarà sufficiente mostrare che esiste una successione $(\phi)_n$ di funzioni continue, verificanti 1. e 2. , perchè allora, approssimando (con Weierstrass) abbastanza finemente le ϕ_n con funzioni differenziabili, si ha la famiglia richiesta (precisamente, se $r_n = d(\phi_n, \phi_{n+1})$, si approssimi ϕ_n a meno di $\frac{1}{2} inf\{r_n, r_{n-1}\}$).

Sia quindi $\rho : S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ definita da $\rho(x) = sup\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \lambda x \in V\}$.
Tale ρ è semicontinua nel senso che per $x_0 \in S^{n-1}$ e $\epsilon > 0$, esiste un intorno U di x_0 tale che per $y \in U$ si ha $\rho(y) > \rho(x_0) - \epsilon$.

Sia $\mathcal{R} = \{f \in \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n] : f < \rho\}$. Questa è una famiglia numerabile il cui primo elemento può essere scelto una costante $f_0 \in \mathbb{Q}$ positiva (perchè ρ ha un minimo positivo.

Poniamo $\phi_n = sup_i\{f_i\}$. Allora $0 < \phi_n \leq \phi_{n+1}$.Tale successione $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa la proprietà 2. . Infatti se $x_0 \in V$, $\|x_0\| < \rho(x_0/\|x_0\|)$;
per semicontinuità di ρ , esiste un intorno U di x_0 tale che $\rho > \|x_0\|$ in U. Allora esiste una funzione continua $\sigma : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ con $\sigma(x_0/\|x_0\|) = \|x_0\|$ e $\text{supp}(\sigma) \subset U$. Quindi $\sigma < \rho$ e $\sigma(x_0/\|x_0\|) = \|x_0\|$. Se $\epsilon > 0$ è tale che $\rho - \sigma > \epsilon$ ossia $\sigma + \epsilon < \rho$, approssimando sufficientemente $\sigma + \epsilon$ con un elemento $f \in \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ si trova una $f \in \mathcal{R}$, quindi $f = f_n$ per qualche n e $f_n(x_0/\|x_0\|) > \|x_0\|$.

Manca da soddisfare la condizione $\phi_n < \phi_{n+1}$. Essa non sarà in generale soddisfatta ma sarà ottenibile cancellando alcune ϕ_i e ciò conclude la dimostrazione dell'asserzione 1.

Asserzione 2: Sia $\phi : S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ differenziabile e sia $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \phi(x/\|x\|)\}$. Allora esiste un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ in se che trasforma una palla aperta in V.

Dimostriamo questa asserzione: $\mathbb{R}^n - 0$ può essere pensato come $S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ tramite il diffeomorfismo (coordinate polari):

$$S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \ni (s, r) \to r \cdot s \in \mathbb{R}^n - \{o\}.$$

Considereremo applicazioni $F : S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \to S^{n-1} \times R^+$ del tipo $F(s, r) = (s, h(s, r))$ ove $h : S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è differenziabile ; ogni tale f sarà evidentemente differenziabile. Articoleremo il ragionamento nei seguenti quattro passi:
A) Se esiste $\epsilon > 0$ tale che $h(s, r) = r$ per $r < \epsilon_0$, tale F induce una applicazione differenziabile di $\mathbb{R}^n$ in se che è l'identità vicino all'origine.
B) Se $\partial h/\partial r > 0$, allora F rappresenta un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ su un aperto di $\mathbb{R}^n$ (teorema di inversione locale + iniettività).
C) Se inoltre $\lim_{r\to+\infty} = +\infty$ per ogni s , allora F è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ in se. In tal caso , $B(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ viene trasformato su $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h(x/\|x\|, 1)\}$. Affinchè sia $\Omega = V$, occorre quindi che valga anche la :
D) $h(x/\|x\|, 1) = \phi(x/\|x\|)$.

Dimostriamo ora l'esistenza di una $h : S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ soddisfaciente le quattro condizioni A,B,C e D.
Siano $0 < \epsilon_0 < \epsilon_1 < \phi$. E' facile costruire funzioni differenziabili $\lambda, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificanti le condizioni :
- $\lambda(t) = 1$ per $t \leq \epsilon_0$, $\lambda(t) = 0$ per $t \geq 1$, $\lambda \geq 0$ e $\int_0^{+\infty} \lambda(t)dt = M < \epsilon_1$.
- $\mu(t) = 0$ per $t \leq \epsilon_0$ o $t \geq 1$, $\mu \geq 0$ e $\int_0^{+\infty} \mu(t)dt = M < \epsilon_1$.

Si vede facilmente che la funzione $h(s, r) = \int_0^r (\lambda(t) + (\phi(s) - M)\mu(t))dt$ verifica le condizioni richieste.

Asserzione 3. Esistono diffeomorfismi $F_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che trasformano $B(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < p\}$ in V_p e tali che per $p \geq 2$, F_p coincide con F_{n-1} su $B(n-1)$. Ciò viene dimostrato sostanzialmente nello stesso modo dell'asserzione 2.

Definiamo ora $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con la formula : $F(x) = F_p(x)$ se $x \in B(p)$. E' chiaro che F è un diffeomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e V.

Per estendere la costruzione fatta nel caso di un aperto di $\mathbb{R}^n$ al caso di una varietà differenziabile qualsiasi , supponiamo $X \subset \mathbb{R}^n$ e definiamo una sorta di "convessi" su X che "funzionano" come i convessi di $\mathbb{R}^n$.

Def. Un *dominio a frontiera liscia* in una varietà differenziabile X di dimensione n , è un aperto Ω di X che verifica le proprietà :
1. Ω è la parte interna della sua chiusura
2. $\bar{\Omega}$ è una sottovarietà compatta a bordo di X

Ciò è equivalente a richiedere:
1'. Ω è relativamente compatto in X
2'. ogni $x_0 \in \partial\Omega$(=frontiera topologica di Ω) ha un intorno U su cui esiste una funzione differenziabile $f : U \to \mathbb{R}$ tale che $\Omega \cap U = \{x \in U : f(x) < 0\}$ e se $f(x) = 0$, allora $df(x) \neq 0$. Una tale f è detta una *equazione* su U per il bordo di Ω.

Fortemente convessi in $\mathbb{R}^n$

Siano X un dominio a frontiera liscia in $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \partial\Omega$, U un intorno aperto di x_0 in $\mathbb{R}^n$ ed h una equazione locale per $\partial\Omega$ su U. Chiameremo *hessiano di h* in X la forma quadratica su $T(\partial\Omega)_{x_0}$ che è restrizione della forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ associata alla matrice $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(x_0))$; essa verrà indicata con $\mathcal{H}(h)(x_0)$.

Lemma 48 *Se k è un'altra equazione locale su U per $\partial\Omega$, allora esiste una costante positiva ρ tale che $\mathcal{H}(k) = \rho\mathcal{H}(h)$.*

Def. Per il lemma precedente la segnatura di $\mathcal{H}(h)$ (ossia la terna (a, b, c) data dai suoi indici di positività , negatività e nullità) è indipendente dalla particolare equazione utilizzata e sarà detta la *segnatura* di Ω in $x_0 \in \partial\Omega$

Dim. del Lemma: Per il teorema di divisione , si ha che $k = rh$ con $r : U \to \mathbb{R}$ è differenziabile mai nulla in U anzi strettamente positiva perchè h, k sono entrambe negative su $\Omega \cap U$.

confrontiamo gli hessiani di h, k ; calcoliamo prima su $\mathbb{R}^n$:
- $\partial k/\partial x_i = \partial r/\partial x_i + r\partial h/\partial x_i$
- $\partial^2 k/\partial x_i \partial x_j = (\partial^2 r/\partial x_i \partial x_j)h + (\partial r/\partial x_i)(\partial h/\partial x_j) +$
$+ (\partial r/\partial x_j)(\partial h/\partial x_i) + r(\partial^2 h/\partial x_i \partial x_j)$

Calcolando in x_0 si ha $h = 0$, quindi il primo addendo del secondo membro si annulla. Vediamo poi che calcolando l'hessiano di k su un vettore $v \in T(\partial\Omega)_{x_0}$, anche il secondo e terzo addendo si annullano , cosicchè solo il quarto membro rimane e quindi $\mathcal{H}(k)(x_0) = r(x_0)\mathcal{H}(h)(x_0)$ ove $r(x_0) \neq 0$.
Infatti la matrice data da secondo e terzo membro si può scrivere:

$(\nabla r)(\nabla h)^* + (\nabla h)(\nabla r)^*$ (M^* indica la trasposta della matrice M).
Il suo valore su un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è dato da $v^*(\nabla r)(\nabla h)^* v + v^*(\nabla h)(\nabla r)^* v$ ed essendo l'equazione di $T(\partial\Omega)_{x_0}$ esattamente $v^*(\nabla h) = 0$ od anche $(\nabla h)^* v = 0$, tale espressione si annulla per $v \in T(\partial\Omega)_{x_0}$.

Nota Si può dare la seguente caratterizzazione della segnatura (a, b, c) di un dominio liscio in un suo punto x_0 del bordo:

Sia $H \subset \mathbb{R}^n$ uno spazio affine ; diremo che esso è *tangente* a X in x_0 se $x_0 \in H$ e se la direzione di H (unico sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di cui H è un traslato) è contenuto in $T(\partial\Omega)_{x_0}$. Un tale H è detto *tangente internamente* (risp. *tangente esternamente*) a X in x_0 se è tangente nel senso precisato sopra ed esiste $\epsilon > 0$ tale che $H_\epsilon = \{v \in H : 0 < \|v - x_0\| < \epsilon\} \subset \Omega$.

Considerando la restrizione della funzione h ad H si vede facilmente che $a \leq$massima dimensione dei sottospazi affini tangenti esternamente ad Ω in x_0 $\leq a + c$ e b è riferito analogamente alle possibili dimensioni degli spazi affini tangenti internamente. Ne segue che se l'hessiano è non degenere , ossia $c = 0$, allora a e b misurano esattamente tali dimensioni.

Def. Un aperto *fortemente convesso* in $\mathbb{R}^n$ è un dominio a frontiera liscia , connesso ed avente segnatura $(n-1, 0, 0)$ in ogni punto del bordo.

Proposizione 49 *Un aperto fortemente convesso in $\mathbb{R}^n$ è convesso.*

Dim. Siano $x_0, x_1 \in \Omega$; dobbiamo mostrare che $[x_0, x_1] \subset \Omega$. Essendo Ω connesso , esiste una curva $\gamma : [0,1] \to \Omega$ con $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. Sia $\Delta = \{t \in [0,1] : [x_0, \gamma(t)] \not\subset \Omega\}$ Tale Δ è chiaramente un chiuso in $[0,1]$, quindi se non vuoto ha un primo elemento t_0. E' facile convincersi che allora la retta H per $x_0, \gamma(t_0)$ è tangente internamente a $\partial\Omega$ in qualche suo punto $\bar{x}$. Ma allora la segnatura di $\partial\Omega$ in $\bar{x}$, dovrebbe avere $b + g > 0$ contro l'ipotesi.

Nota : La segnatura di un dominio liscio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ non cambia , cambiando linearmente le coordinate di $\mathbb{R}^n$; tale nozione è quindi trasportabile su uno spazio vettoriale (o affine) qualsiasi.

Fortemente convessi in sottovarietà di $\mathbb{R}^n$

Sia $X \subset \mathbb{R}^N$ una sottovarietà .
Def. Un *dominio fortemente convesso* in X è un dominio liscio $\Omega \subset X$ tale che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ $\pi_x : X \to T(X)_x$ induce un diffeomorfismo tra $\bar{\Omega}$ e la chiusura di un dominio fortemente convesso di $T(X)_x$ (ossia è un dominio che "letto" dallo spazio tangente di un qualsiasi punto della sua chiusura , "appare" fortemente convesso).

Proposizione 50 *Siano $X \subset \mathbb{R}^N$ una varietà differenziabile e $x_0 \in X$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo , $B_\epsilon = \{x \in X : \|x - x_0\|^2 < \epsilon\}$ è un dominio fortemente convesso di X.*

Dim. La proiezione ortogonale di $T(X)_x$ su $H = T(X)_{x_0}$ per x in un intorno sufficientemente piccolo U di x_0 in X , è un isomorfismo ; si ottiene così , utilizzando anche una carta locale su X di centro x_0 una applicazione $f(x,y) : U \times \mathbb{R}^n \to H$ che rappresenta $\phi_x(y)$ e che è chiaramente differenziabile. Per $\epsilon > 0$ indichiamo con D_ϵ la chiusura di B_ϵ in X. Mostriamo che esiste $\epsilon > 0$ tale che per $x \in D_\epsilon$, π_x induce un diffeomorfismo tra D_ϵ e la sua immagine e questa è un dominio fortemente convesso.
Iniettività di $d\pi_x$:
per assurdo esisterebbero x_h , $y_h \in \mathbb{R}^n$ e $v_h \in S^{n-1}$ tali che $df_{x_h}(y_h)[v_h] = 0$. Passando al limite in qualche sottosuccessione per cui v_h converga , si avrebbe $df_0(0)[v] = 0$ che non è possibile perchè f_o è l'identità e $\|v\| = 1$.
Iniettività di π_x:
per assurdo esisterebbero $x_h, a_h \neq b_h \in \mathbb{R}^n$ tali che $f_{x_h}(a_h) = f_{x_h}(b_h)$. Utilizzando lo sviluppo $f(x, y + z) = f(x,y) + \phi(x,y,z)[z]$ si avrebbe $f(x_h, b_h) =$

$f(x_h, a_h) + \phi(x_h, a_h, b_h - a_h)[b_h - a_h]$ e quindi $\phi(x_h, a_h, b_h - a_h)[b_h - a_h] = 0$. Osservato che $\phi(0,0,0)$ è l'identità su $\mathbb{R}^n$ e passando al limite in una sottosuccessione per la quale $b_h - a_h/\|b_h - a_h\|$ converge si ottiene una contraddizione.

Si osservi ora che per ϵ piccolo , $D_\epsilon \subset X$ è un dominio connesso a frontiera liscia (si utilizzi ad esempio il lemma di Morse). Resta qindi da dimostrare che se ϵ è piccolo , per ogni $x \in D_\epsilon$ il dominio connesso a frontiera liscia $\pi_x(D_\epsilon)$ in $T(X)_x$ ha segnatura $(n-1,0,0)$ in ogni punto del bordo.

Resta quindi da verificare la condizione sugli hessiani. Una equazione di definizione per il bordo di Ω_ϵ su X è data dalla funzione $\|x - x_0\|^2$. Verifichiamo che essa in tutti i punti di Ω_ϵ e su tutto lo spazio tangente (e non solo su $T(\partial\Omega)$ come già basterebbe ai nostri fini) è definita positiva. Infatti, siccome il fatto di avere hessiano definito positivo è invariante per cambiamenti affini di coordinate, possiamo leggere $T(X)_y$ per proiezione ortogonale su $H = T(X)_{x_0}$. Si ottiene così una funzione $\phi(x,y)$ definita in un intorno $U \times V$ di $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = H \times H$ che per $y \in V$ rappresenta (a meno di una costante $-\epsilon$) una equazione per il dominio D_ϵ "letto" su $T(X)_y$. Siccome f_0 ha hessiano definito positivo, ne segue che anche le f_y per y piccolo hanno hessiano positivo (su qualche intorno compatto di 0 in X) e ciò conclude la dimostrazione.

Descrizione formale del gruppo fondamentale

Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto fissato dello spazio topologico X.

Un *cammino formale* è una successione $i_0, \cdots, i_r$ di elementi di I tali che $U_{i_h} \cap U_{i_h+1}$ sia non vuoto per $h = 0, \cdots, r-1$. Diremo che tale cammino ha *inizio* in i_0 e *termine* in i_r. Si possono comporre in modo ovvio due cammini se il secondo inizia ove termina il primo . Se $\gamma_1 = (i_0, \cdots, i_r)$ è un cammino formale e $i \in I$ è tale che $U_{i_s} \cap U_i \cap U_{i_{s+1}}$ sia non vuoto allora il cammino $\gamma_2 = (i_0, \cdots, i_s, i, i_{s+1}, \cdots, i_r)$ è detto ottenuto da γ_1 per *espansione elementare* ; diremo anche che γ_1 è ottenuto da γ_2 per *contrazione elementare*. Due cammini sono *equivalenti* se si può passare dall' uno all'altro con un numero finito di espansioni e contrazioni elementari. Evidentemente due cammini equivalenti hanno stesso inizio e termine. E' facile verificare che le classi di equivalenza di cammini chiusi in i_0 (ossia cammini con inizio e termine in i_0) formano un gruppo che sarà detto gruppo formale di $\mathcal{U}$ e sarà indicato col simbolo $\Pi(\mathcal{U}, i_0)$.

Supponiamo che $\mathcal{U}$ sia un buon ricoprimento dello spazio topologico connesso X. Fissiamo per ogni $i \in I$ un $x_i \in U_i$. Siano fissati inoltre cammini continui $\gamma_{i,j}$ da x_i a x_j in $U_i \cup U_j$ per ogni coppia $i,j \in I$ per cui $U_i \cap U_j$ sia non vuoto.

Costruiamo un omomorfismo $\phi : \Pi(\mathcal{U}, i_0) \to \pi_1(X, x_{i_0})$ associando ad un cammino formale $(i_0, \cdots, i_r, i_0)$ la classe di omotopia di $\gamma_{i_0,i_1} * \gamma_{i_1,i_2} * \cdots * \gamma_{i_r,i_0}$. Essendo $\mathcal{U}$ un buon ricoprimento , si verifica facilmente che ϕ è un omomorfismo ben definito indipendentemente dalle scelte fatte (a parte il punto base). Con un pò di lavoro analogo a quello richiesto per dimostrare il teorema di Van Kampen , si dimostra inoltre che ϕ è un isomorfismo .

Nota : si possono costruire generatori di $\pi_1(X, x_{i_0})$ fissando cammini continui γ_i da x_{i_0} a x_i in X . Allora i cammini $\bar{\gamma}_{ij} = \gamma_i * \gamma_{i,j} * \gamma_j^{-1}$ per $i,j \in I$ tali che $U_i \cap U_j$ sia non vuoto , costituiscono un sistema di generatori per il gruppo fondamentale di X. Col teorema di Van Kampen si può anche dimostrare che una presentazione di π_1 in tali generatori è data dalle relazioni $\bar{\gamma}_{ij} * \bar{\gamma}_{jk} * \bar{\gamma}_{ki} = 1$ per ogni i,j,k tali che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Torniamo ora alla costruzione di

equazioni per ipersuperfici in X. Si aveva la seguente situazione :
1. è dato un ricoprimento buono $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ di una varietà X
2.sono assegnate costanti $\epsilon_{i,j} \in \{+1, -1\}$ per $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j$ sia non vuoto
3.per $i, j, k \in I$ tali che $U_i \cap U_j \cap U_k$ sia non vuoto, si ha la relazione $\epsilon_{i,j} \cdot \epsilon_{j,k} = \epsilon_{i,k}$
Vogliamo sapere se :
4. esistono costanti $\epsilon_i \in I$ tali che per ogni $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j$ sia non vuoto si abbia $\epsilon_{i,j} = \epsilon_i / \epsilon_j (= \epsilon_i \cdot \epsilon_j$ perchè tali costanti sono di periodo due).

Siano quindi assegnate costanti come in 1.—3. che indicheremo in blocco col simbolo ω. Per ogni cammino formale $\sigma = (i_1, \cdots, i_r)$ poniamo :

$$\int_\sigma \omega = \epsilon_{i_1,i_2} \cdot \epsilon_{i_2,i_3} \cdots \epsilon_{i_{r-1},i_r}$$

Le relazioni 3. di sopra assicurano che tale "integrale" ha lo stesso valore su cammini equivalenti. Definisce in particolare una applicazione

$$\nu : \Pi(\mathcal{U}, x_{i_0}) \to \{+1, -1\}$$

che è un omomorfismo di gruppi. Supponiamo che tale omomorfismo sia nullo. Ne segue che per ogni $i \in I$ possiamo definire una costante ϵ_i "integrando" lungo un cammino qualsiasi da i_0 ad i ; tali costanti verificheranno la condizione 4. , cosicchè l'ipersuperficie da cui eravamo partiti ha una equazione.

Resta da dimostrazione che se $\pi_1(X, x_0)$ ha omomorfismi non banali a valori in $\mathbb{R}$, allora esiste in X qualche ipersuperficie chiusa che non possiede equazioni locali. Sia $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ un omomorfismo. Identifichiamo per $x \in U_i \cap U_j$ e $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$ il punto $(x, \lambda_i) \in U_i \times \mathbb{R}$ con $(x, \sigma(\bar{\gamma}_{ij}) \cdot \lambda_j) \in U_j \times \mathbb{R}$. Si ottiene così un fibrato vettoriale di rango uno su X. Sia s una sezione di tale tale fibrato trasversale alla sezione nulla; dal teorema di divisione locale si ottiene che il luogo di zeri Y di s non può avere una equazione globale se σ non è banale.

Algebra esterna di uno spazio vettoriale

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e p un intero non negativo. Definiamo una relazione di equivalenza su V^p nel modo seguente: $v = (v_1, \ldots, v_p) \sim w = (w_1, \ldots, w_p)$ se e solo se è verificata una (almeno) delle seguenti due condizioni:

- v e w sono entrambi sistemi linearmente dipendenti in V
- esiste una matrice quadrata $M = (m_{ij})$ d'ordine p e determinante 1 tale che $v_i = \sum_1^p m_{ij} w_j$

Gli elementi del quoziente di V^p per tale relazione sono dette le p-faccette di V. Il loro insieme sarà indicato con $F_p(V)$.

Una applicazione $\sigma : F_p(V) \to W$ delle p-faccette di V in uno spazio vettoriale W è detto un *morfismo* se la composizione $V^p \to F_p(V) \to W$ è p-lineare alternante. Un tale morfismo sarà detto un *prodotto esterno* di grado p per V se verifica la seguente condizione:

per ogni altro morfismo $\sigma' : F_p(V) \to W'$ esiste una ed una sola applicazione lineare $h : W \to W'$ tale che $\sigma' = h \circ \sigma$.

Unicità. E' facile verificare che se σ, σ' soddisfano entrambi la condizione precedente, allora esiste uno ed un solo isomorfismo $h : W \to W'$ che trasforma σ in σ', cosicché tali spazi sono identificabili in modo ben precisato. Esprimeremo ciò dicendo che il prodotto esterno di grado p per V se esiste è *univocamente determinato a meno di isomorfismi.*

Esistenza. Siano dati un morfismo $\sigma : F_p(V) \to W$ e una base $(e_1, \ldots, e_n)$ di V. E' facile verificare che σ è un prodotto esterno di grado p per V se e solo se gli elementi $(\sigma(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$ costituiscono una base di W.
Infatti ciò equivale ad asserire che dare una applicazione p-lineare alternante σ' su V a valori in uno spazio W', equivale ad assegnare i valori di σ' sugli elementi $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ per $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$.

Esibiamo una tale σ: sia V^* il duale di V e W ={applicazioni p-lineari alternanti su V^* a valori in $\mathbb{R}$}. Definiamo $\sigma : V^p \to W$ così :

per $v_1, \ldots, v_p \in V$, $\sigma(v_1, \ldots v_p)[h_1, \ldots, h_p] = det(h_i(v_j))$.

Dette $e_1, \ldots, e_n$ una base di V e $e_1^*, \ldots, e_n^*$ la duale in V^*, per $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ e $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$ si ha:

$$\sigma(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})[e_{j_1}^*, \ldots, e_{j_p}^*] = \delta_{i_1 j_1} \cdot \ldots \cdot, \delta_{i_p j_p}$$

Utilizzando il fatto sopra ricordato di come si scrivono le forme p-lineari su uno spazio in cui è fissata una base, si conclude che σ è un prodotto esterno di grado p per V. Tale W verrà indicato con la notazione $\bigwedge^p V$ e l'applicazione $V^p \to \bigwedge^p V$ con $(v_1, \ldots, v_p) \to v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$; un elemento in $\bigwedge^p V$ sarà detto *semplice* se è nell'immagine di $F^p(V)$.

Nota. Quanto descritto sopra fornisce una immersione della varietà (detta di Grassmann) dei sottospazi vettoriali di dimensione p di V nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(\bigwedge^p V)$ ottenuta considerando per ogni p-faccetta non nulla $v = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ il sottospazio $H(v)$ generato da $v_1, \ldots, v_p$ che verrà detto il suo *supporto.*

Prodotti. Definiamo un prodotto $\bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \to \bigwedge^{p+q} V$ come l'unica applicazione bilineare $(v, w) \to v \wedge w$ verificante:

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge \ldots \wedge w_q) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_q$$

Che tale definizione è ben posta segue facilmente dalle proprietà richieste alle applicazioni $F^r(V) \to \bigwedge^r V$ così come la associatività di tali prodotti e la anticommutatività: per $v \in \bigwedge^p V$, $w \in \bigwedge^q V$ si ha $v \wedge w = (-1)^{p+q} w \wedge v$.

Si ottiene coì una $\mathbb{R}-$algebra $\bigwedge V = \bigoplus_{i \geq 0} \bigwedge^i V$, che viene chiamata l'*algebra esterna* su V.

Per $h_1, \ldots, h_p \in V^*$ e $v_1, \ldots, v_p \in V$ ponendo

$$(h_1 \wedge \ldots \wedge h_p)[v_1 \wedge \ldots \wedge v_p] = det(h_i(v_j))$$

si ottiene un isomorfismo di $\bigwedge^p V^*$ con $(\bigwedge^p)^*$.

Se $b : V \times V \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare, si ottiene una forma bilineare b_p su $\bigwedge^p V$ ponendo

$$b_p(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p, w_1 \wedge \ldots \wedge w_p) = det(b(v_i, w_j))$$

Tale b_p è simmetrica e definita positiva se b lo è.

Siano fissati su V un prodotto scalare $<,>$ definito positivo ed una orientazione (un tale oggetto viene detto *spazio euclideo*). Definiamo ora un isomorfismo $* : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$ associando ad una p-faccetta $v = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ la $(n-p)$-faccetta $w = w_1 \wedge \ldots \wedge w_{n-p}$ avente per supporto l'ortogonale del supporto di v , tale che v e w abbiano la stessa norma e tale che $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{n-p}$ dia l'orientazione positiva di V. Si vede facilmente che $*$ è una isometria e che $*^2$ è la moltiplicazione per $(-1)^{p(n-p)}$; ciò può essere controllato ad esempio osservando che se $e_1, \ldots, e_n$ costituiscono una base ortonormale di V , allora gli $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ per $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$ sono una base ortonormale per $\bigwedge^p V$. In particolare $\bigwedge^n V$ verrà identificato canonicamente con $\mathbb{R}$ fissando per base la n-faccetta $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$.

Nel seguito avremo uno spazio vettoriale V che sarà lo spazio tangente $T(X, \bar{x})$ in un punto $\bar{x}$ ad una varietà differenziabile X e considereremo l'algebra esterna sul suo duale V^*. Dalla costruzione descritta avanti segue che $\bigwedge^p V^*$ è identificato con lo spazio vettoriale delle forme $\alpha : V^p \to \mathbb{R}$ $p-$lineari simmetriche. Se $x_1, \ldots, x_n$ sono coordinate locali su X vicino ad $\bar{x}$, allora $dx_1, \ldots, dx_n$ costituiscono una base per V^* e quindi una base per $\bigwedge^p V$ è data dalle forme $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ per $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$.

Siano α una p-forma e β una q-forma su V. Se esse sono semplici , $\alpha = h_1 \wedge \ldots \wedge h_p$ e $\beta = k_1 \wedge \ldots \wedge k_q$ ove $h_1, \ldots, h_p$, $k_1, \ldots, k_q \in V^*$, si è posto $\alpha \wedge \beta = h_1 \wedge \ldots \wedge h_p \wedge k_1 \wedge \ldots \wedge k_q$. Se α e β non sono semplici, essendo esse somma di semplici, si può calcolare $\alpha \wedge \beta$ utilizzando la distributività del prodotto esterno rispetto alla somma. Altrimenti si può utilizzare la seguente formula per la cui validità è sufficiente controllare il caso in cui α e β sono semplici: se $v_1, \ldots, v_{p+q} \in V$ si ha

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q)} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \beta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$$

ove $\mathfrak{S}(p, q)$ è il gruppo delle permutazioni σ di $\{1, \ldots, p + q\}$ tali che $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ e $\sigma(p + 1) < \cdots < \sigma(p + q)$ e come al solito $|\sigma|$ è la parità della permutazione.

*Nota.*Le formule ora date, nel caso di forme semplici sono precisamente le formule di Laplace generalizzate per il calcolo dei determinanti.

Forme differenziali su una varietà

Sia Ω un aperto in una varietà differenziabile X; una *forma differenziale* di grado p o *p-forma* ω su Ω è il dato per ogni punto $\bar{x}$ in Ω di una p-forma $\omega(\bar{x})$ sullo spazio tangente $T(X)_{\bar{x}}$. Se $(x_1, \ldots, x_n)$ sono coordinate su un aperto $U \subset \Omega$ si ha una scrittura $\omega(\bar{x}) = \sum a_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, ove la somma è estesa alle p-uple crescenti $i_1 < \ldots < i_p$ in $\{1, \ldots, n\}$ e le $a_{i_1 \ldots i_p}$ sono funzioni univocamente determinate su U. Diremo che ω è a *coefficienti continui* o *differenziabili* se in ogni tale rappresentazione le funzioni $a_{i_1 \ldots i_p}$ sono continue o differenziabili. Indicheremo con $A^p(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle p-forme a coefficienti differenziabili sull'aperto Ω della varietà differenziabile X e con $A^p_c(\Omega)$ il sottospazio di quelle a supporto compatto.

Se $f : X \to Y$ è una applicazione differenziabile ed $x \in X$, il *differenziale* di f in x è (stato definito come) una applicazione lineare $df(x) : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$; se ω è una p-forma su un aperto U di Y, indicheremo con $f^*\omega$ la p-forma su $f^{-1}(U)$ definita per $x \in f^{-1}(U)$ e $v_1, \ldots, v_p \in T_x(X)$ dalla eguaglianza:

$$f^*\omega(x)[v_1, \ldots, v_p] = \omega(f(x))[df(x)[v_1], \ldots, df(x)[v_p]]$$

E' facile verificare, scrivendo la f in termini di coordinate locali, che $f^*\omega$ è differenziabile se ω lo è e che essa commuta con le operazioni dell'algebra esterna. Inoltre, se $g : Y \to Z$ è anche differenziabile, si ha $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$; con queste definizioni gli $A^p(X)$ divengono funtori contravarianti sulla categoria delle varietà differenziabili. Diversamente gli $A_c(X)$ rappresentano dei funtori (ancora contravarianti) solo sulla categoria i cui oggetti sono ancora le varietà differenziabili ma i morfismi sono solo le applicazioni differenziabili proprie.

Sia X una varietà differenziabile orientata di dimensione n. Definiamo una applicazione lineare $\int_X : A^n_c(X) \to \mathbb{R}$ così:
se il supporto di $\omega \in A^n_c(X)$ è contenuto in una carta orientata (U, h) di X, si legga ω tramite h come forma su $\mathbb{R}^n$; si otterrà una n-forma $f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ con f differenziabile a supporto compatto e si definisce:

$$\int_X \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n$$

Nel caso generale utilizzando una partizione dell'unità ed il fatto che il supporto di ω è compatto, si trova una decomposizione $\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_r$ ove ogni ω_i ha supporto contenuto in qualche carta orientata su X e si pone :

$$\int_X \omega = \int_X \omega_1 + \ldots + \int_X \omega_r$$

Che i valori trovati non dipendono dalle scelte arbitrarie fatte si dimostra facilmente utilizzando la formula di cambiamento di variabili in un integrale multiplo in $\mathbb{R}^n$ e la linearità per tali integrali.
Nota. E' chiaro che l'integrazione delle n-forme a supporto compatto risulta definita anche se la varietà X ha un bordo non vuoto o per forme a coefficienti continui. Se il supporto dell'integrando ω non è compatto l'integrale è definibile solo sotto certe condizioni. La condizione generale di integrabilità che può essere richiesta è la seguente: per ogni $\epsilon > 0$ esiste un compatto K tale che per ogni funzione continua $h : X \to [0, 1]$ avente supporto compatto disgiunto da K si ha $|\int_X h\omega| < \epsilon$. Ciò corrisponde al fatto che comunque si decomponga la forma

in una somma di forme i cui supporti costituiscano una famiglia localmente finita, l'integrazione degli addendi fornisce una serie convergente incondizionatamente (ossia la somma non solo è finita per ogni ordinamento seguito nella sommazione ma anche il risultato è lo stesso: trattandosi di serie di numeri reali, ciò è equivalente alla assoluta convergenza). Oppure si può fissare una procedura determinata di integrazioni e richiedere che esista il limite dei valori così trovati come ad esempio col porre $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(t)dt$.

Una coppia (Δ, h) ove Δ è una varietà differenziabile orientata compatta a bordo di dimensione p e $h : \Delta \to X$ è una applicazione differenziabile verrà detta *p-catena differenziabile* in X; se $\partial\Delta = \emptyset$ essa verrà detta un *p-ciclo differenziabile*. Ogni tale p-catena definisce una applicazione lineare $\int_{(\Delta,h)} : A^p(X) \to \mathbb{R}$ definendo per una p-forma ω su X :

$$\int_{(\Delta,h)} \omega = \int_{\Delta} h^*(\omega)$$

Chiameremo *opposta* di una p-catena $\gamma = (\Delta, h)$ su X la p-catena , $\bar{\gamma} = (\bar{\Delta}, h)$ ove Δè ottenuta da Δ invertendo l'orientazione. Se $\gamma_i = (\Delta_i, h_i)$ per $i = 1, 2$ sono p-catene in X, considerando l'unione disgiunta di Δ_1 e Δ_2 si ottiene una p-catena che verrà detta *somma* di γ_1 e γ_2. Due p-cicli γ_1, γ_2 sono *bordanti* se $\gamma 1 + \bar{\gamma}_2$ è il bordo di qualche $(p+1)$-catena. Per dimostrare che questa è una relazione di equivalenza, occorre utilizzare l'esistenza di un *collare* per il bordo di varietà differenziabili; ossia che se X è una varietà differenziabile compatta (ma è vero anche senza questa ipotesi), esiste un intorno di ∂X in X diffeomorfo a $\partial X \times [0, 1[$. Oppure si può per semplicità mettere ciò nella definizione di varietà a bordo.

E' facile verificare che le classi di equivalenza di p-cicli di una varietà X, formano un gruppo abeliano (l'opposto della classe di γ è la classe di $\bar{\gamma}$) che viene detto p-esimo gruppo di *bordismo orientato* $B_p(X)$ di X. Se $f : X \to Y$ è differenziabile, si ha un omomorfismo $f_* : B_p(X) \to B_p(Y)$ che dipende solo dalla classe di omotopia di f. Per il tipo di considerazioni che svolgeremo nel seguito, questo invariante è troppo fine; infatti esso tiene conto non solo della complessità della varietà X su cui lo si calcola, ma anche del fatto che non tutte le varietà orientate sono bordo di qualcosa. Ad esempio si può dimostrare (non in modo elementare) che la 4-varietà $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non è il bordo di alcuna 5-varietà orientata, cosicché ogni applicazione $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to X$ anche se costante ed anche se X è un punto, dà un elemento non nullo in $B_p(X)$. Per ridurre questo invariante in modo che rappresenti solo la complessità topologica di X si devono ammettere cicli con singolarità. Un modo, è quello di sostituire le varietà Δ di dimensione p che abbiamo considerato all'inizio con poliedri orientati P (in qualche $\mathbb{R}^n$) ed applicazioni (differenziabili o continue,non cambia molto) $h : P \to X$. Gli invarianti che ne derivano sono detti *gruppi di omologia singolare a coefficienti* in $\mathbb{Z}$. Un altro modo potrebbe essere quello di ammettere solo certi tipi di singolarità: si fissa una lista di poliedri e si prendono sottoinsiemi $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ che siano localmente modellati sugli elementi della lista (con orientazioni coerentemente definite). Si possono così ottenere teorie intermedie alle due discusse sopra.

L'operatore di differenzazione

Sia X una varietà differenziabile. Associando ad ogni funzione differenziabile il suo differenziale, si ottiene un omomorfismo $d : A^0(X) \ni f \to df \in A^1(X)$. Gli elementi di $\mathrm{I}m(d)$ sono detti differenziali *esatti* o *integrabili* su X ; essi costituiscono uno spazio vettoriale $B^1(X)$. Per $\omega \in B^1(X)$, ogni $f \in A_0(X)$ tale che $df = \omega$ è detta una primitiva di ω; se X è connessa, due primitive della stessa forma differiscono per una costante. La 1-forma df misura infatti quanto la f non sia localmente costante. Precisamente se valutamo la f sullo 0-ciclo $x_0 \in X$, ottenendo quindi $f(x_0)$ e confrontiamo con il valore $f(x_1)$ in un punto x_1 vicino a x_0, la differenza $f(x_1) - f(x_0)$ può essere calcolata con l'integrale di df su una qualsiasi 1-catena γ che ha per bordo $\{x_1, -x_0\}$; infatti per la formula di Torricelli, se $\gamma : [0,1] \to X$ è differenziabile, si ha

$$\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

Costruiremo ora operatori $d : A^p(X) \to A^{p+1}(X)$ che svolgono lo stesso ruolo per le p-forme: si vuole associare ad una p forma ω una $(p+1)$-forma $d\omega$ che misura quanto $\int_\Delta \omega$ vari quando Δ viene sostituito con un ciclo bordante con lui; precisamente gli operatori d verificheranno una analoga della formula di Torricelli che verrà detta formula di Stokes:

per $\omega \in A^p(X)$ e (Δ, h) una $(p+1)$-catena in X si ha:

$$\int_{(\Delta,h)} d\omega = \int_{\partial(\Delta,h)} \omega$$

Chiameremo *esatte* o *integrabili* le p-forme α che siano il differenziale di una $(p-1)$-forma ω che verrà detta una sua *primitiva*; queste formeranno uno spazio vettoriale $B^p(X)$. Una p-forma sarà detta invece *chiusa* o *localmente integrabile* se ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U sul quale la forma è integrabile; queste formeranno uno spazio vettoriale $Z^p(X)$ e il quoziente $Z^p(X)/B^p(X) = H^p(X)$ sarà chiamato p-esimo *spazio di coomologia* di de Rham di X.

Analoghe definizioni si introducono per le forme a supporto compatto: una $\omega \in A^p_c(X)$ sarà detta *integrabile* se esiste $\alpha \in A^{p-1}_c(X)$ tale che $d\alpha = \omega$ e sarà detta *chiusa* se tale è in quanto $p-$forma su X, ossia $d\omega = 0$; si introducono così gli *spazi di coomologia a supporti compatti* $H^p_c(X)$ come quozienti di $\{$forme (a supporto compatto) chiuse$\}$ modulo $\{$forme esatte$\}$. Si noti che se $f : X \to Y$ è differenziabile, non è definita $f^* : A^p_c(Y) \to A^p_c(X)$ e quindi neppure una $f^* : H^p_c(Y) \to H^p_c(X)$ a meno che f sia propria; essa però esiste in un caso particolarmente importante, quello in cui f è una inclusione aperta, ossia X è un aperto in Y.

L'operatore di differenzazione esterna d viene introdotto di solito in quest'altro modo che seguiremo per uniformarci alla trattazione seguita nei più comuni testi di geometria differenziale:

Teorema 51 *Esiste una ed una sola successione di operatori lineari* $d : A^p(X) \to A^{p+1}(X)$ *per* $p \geq 0$ *che verifica:*

1. *d è l'usuale differenzazione per gli elementi di* $A^0(X)$
2. $d \circ d : A^p(X) \to A^{p+1}(X)$ *è l'operatore nullo*
3. *per* $\alpha \in A^p(X)$ *e* $\beta \in A^q(X)$ *si ha* $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$

Dim. Si dimostra dapprima che d è un *operatore locale*, ossia che per ogni p-forma α il supporto di $d\alpha$ è contenuto nel supporto di α (se $\alpha \equiv 0$ all'intorno di x_0, sia $f \in A^0(X)$ tale che $f \cdot \alpha = 0$ su X e $f \equiv 1$ vicino ad x_0; allora $0 = d(f \cdot \alpha) = \ldots$etc). Si può quindi lavorare su $\mathbb{R}^n$ ove se $x_1, \ldots, x_n$ sono le coordinate le p-forme si scrivono:

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

e per le richieste fatte deve essere:

$$d\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} (da_{i_1 \ldots i_p}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

Con un pò di fatica si scopre che ciò porta ad una buona definizione degli operatori di differenzazione esterna (si controllino i dettagli su un qualsiasi testo di Geometria Differenziale). L'operatore d così introdotto è funtoriale nel senso che se $f : X \to Y$ è una applicazione differenziabile ed ω è una p-forma differenziabile su Y, allora si ha la formula di commutazione: $f^* d\omega = df^* \omega$.

Teorema 52 (Formula di Stokes) *Sia X una varietà orientata a bordo di dimensione p e sia ω una $(p-1)$-forma a supporto compatto su X. Si ha:*

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega$$

*Dim.*Essendo ambo i membri lineari ed essendo ogni forma a supporto compatto esprimibile come somma di forme con supporto contenuto in una carta, è sufficiente dimostrare la formula nel caso $X = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p : x_1 \geq 0\}$. Basterà allora considerare il caso $\omega = a(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ distinguendo in due casi secondo che 1 sia o no presente tra gli $i_1, \ldots, i_p$ e questa è una facile verifica diretta.

Il teorema di de Rham sulle 1-forme

Sia X una varietà differenziabile. Se ω è una 1-forma su X e $\gamma : [a,b] \to X$ è differenziabile, abbiamo definito $\int_\gamma \omega$. Se γ è solo continua tale integrale perde di significato; ma se si suppone che ω sia chiusa, possiamo definire l'integrale anche su cammini continui nel modo seguente: diciamo *piccola* una decomposizione $a = t_0 \leq \ldots \leq t_r = b$ se per $h = 1, \ldots, r$ si ha che $\gamma([t_{h-1}, t_h])$ è contenuto in un aperto U_h di X sul quale esiste una primitiva f_h di ω. Per una tale scelta di dati si definisce $\int_\gamma \omega = \sum_{h=1}^r f_h(\gamma(t_h)) - f_h(\gamma(t_{h-1}))$. Si verifica che tale valore non dipende dalle scelte fatte (le primitive locali, e la decomposizione di $[a,b]$) e che tale valore rimane lo stesso anche se si cambia γ in un cammino a lui omotopo per una omotopia che lascia fissi punto iniziale e finale. In particolare fissato un punto base $x_0 \in X$, si ottiene una applicazione $Z^1(X) \times \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ che è chiaramente bilineare. E' ovvio che se ω è esatta essa ha integrale nullo su tutti i cammini chiusi per cui si ottiene una forma bilineare $H^1_{DR}(X) \times \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$. Ad essa è associato un omomorfismo $\nu : H^1_{DR}(X) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), \mathbb{R})$.

Teorema 53 (de Rham in dimensione uno) *L'omomorfismo ν costruito sopra è un isomorfismo.*

Dim. Sia ω una 1-forma chiusa su X tale che $\int_\gamma = 0$ per ogni $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. Se $\sigma : [0,1] \to X$ è un cammino in X che parte da x_0, allora $\int_\sigma \omega$ dipende solo dal punto finale $x = \sigma(1)$; esso definisce quindi una funzione $f : X \to \mathbb{R}$. Che tale f è differenziabile e che $df = \omega$, si verifica direttamente utilizzando un sistema di coordinate locali all'intorno di x. Ciò dimostra la iniettività di ν.

Per la surgettività occorre mostrare che se $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ è un omomorfismo, allora esiste una 1-forma chiusa ω tale che $\int_\gamma = \sigma(\gamma)$ per ogni $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. La costruzione di tale ω si fa utilizzando un buon ricoprimento $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X, con aperto base U_{i_0} contenente x_0 nel modo seguente.
Siano fissati i seguenti dati:
-per $i \in I$, un punto $x_i \in U_i$ ed un cammino continuo γ_i da x_0 a x_i.
-per $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, un cammino continuo γ_{ij} in $U_i \cup U_j$ da x_i a x_j.
Consideriamo i cammini chiusi $\delta_{ij} = \gamma_i * \gamma_{ij} * \gamma_j^{-1}$ per $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e poniamo $c_{ij} = \sigma(\delta_{ij})$. Se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, essendo $\mathcal{U}$ un buon ricoprimento, $U_i \cup U_j \cup U_k$ è semplicemente connesso per cui si ha la relazione $\delta_{ij} * \delta_{jk} = \delta_{ik}$ e di conseguenza $c_{ij} + c_{jk} = c_{ik}$.

Sia $(\phi_i)_{i \in I}$ una partizione dell'unità subordinata a $\mathcal{U}$. Per $x \in U_i$ poniamo:

$$f_i(x) = \sum_{h \in I'} c_{ih} \phi_h(x)$$

ove I' indica l'insieme degli $h \in I$ per cui $x \in U_h$. Se $x \in U_i \cap U_j$ si ha:

$$f_i(x) - f_j(x) = \sum_{h \in I'} (c_{ih} - c_{jh}) \phi_h$$

Per $h \in I'$ si ha $U_i \cap U_j \cap U_h \neq \emptyset$ e quindi $c_{ih} - c_{jh} = c_{ij}$ non dipende da h. Allora

$$f_i(x) - f_j(x) = c_{ij} \cdot \sum_{h \in I'} \phi_h(x) = c_{ij}$$

perché $\phi_h(x) = 0$ se $h \notin I'$. Le f_i differiscono così sull'intersezione di due elementi di U per una costante: i loro differenziali definiscono quindi una 1-forma chiusa globale ω di cui le f_i sono delle primitive locali. Ciò, ricordando la definizione data avanti di integrale su un cammino continuo, dimostra che per ogni $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ si ha $\sigma(\omega) = \int_\gamma \omega$ e la dimostrazione è conclusa.

Nota : Come asserito in precedente occasione, i cammini δ_{ij} utilizzati nella precedente dimostrazione, costituiscono (inducono) un sistema di generatori per $\pi_1(X, x_0)$. Infatti se $\gamma : [0,1] \to X$ è un cammino chiuso di origine x_0, esiste una decomposizione $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_r = 1$ tale che ogni intervallo $[t_h, t_{h+1}]$ venga applicato entro un elemento $U_{i(h)}$ del ricoprimento dato. Con una omotopia si può deformare γ in modo che per ogni h il punto medio s_h di $[t_h, t_{h+1}]$ venga applicato in $x_{i(h)}$ (infatti gli elementi di $\mathcal{U}$ sono connessi); con un altra omotopia il cammino tra s_h e s_{h+1} viene portato a coincidere con $\gamma_{i(h)i(h+1)}$ (infatti le intersezioni non vuote di due elementi di $\mathcal{U}$ sono semplicemente connesse). Inserendo i cammini $\gamma_{i(h)} * \gamma_{i(h)}^{-1}$ si è finalmente deformato γ in un prodotto di δ_{ij}. Ricordando poi che $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo al gruppo $\Pi(\mathcal{U}, i_0)$ costruito con i cammini formali modulo le relazioni di espansione e contrazione elementare, si ottiene che un insieme di relazioni di definizione per $\pi_1(X, x_0)$ sui generatori δ_{ij} è costituito dalle $\delta_{ij} * \delta_{jk} = \delta_{ik}$ per $i, j, k \in I$ tali che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

La dualità di Poincaré

Abbiamo associato ad ogni varietà differenziabile X degli spazi vettoriali $H^p(X)$ e $H^p_c(X)$ che misurano quanto le condizioni di integrabilità (cioè avere differenziale nullo) assicuri l'effettiva esistenza di primitive.

Essendo $A^p_c(X) \subset A^p(X)$ si ha un omomorfismo $H^p_c(X) \to H^p(X)$ ed è naturale indagare sulle sue proprietà. Vedremo nel seguito che la misura di quanto esso non sia un isomorfismo è legato alla topologia della "frontiera" di X ossia alle proprietà topologiche di X fuori di compatti sufficientemente grandi in X. In questo paragrafo studieremo un alto legame tra queste due coomologie esistente nel caso di varietà orientate.

Sia quindi X una varietà orientata di dimensione n. L'integrazione su X fornisce un omomorfismo $\int_X : A^n_c(X) \to \mathbb{R}$; componendo con l'applicazione bilineare :

$$A^p_c(X) \times A^{n-p}(X) \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta \in A^n_c(X)$$

si ottiene una forma bilineare che induce (lo si dimostri utilizzando la formula di Stokes integrando su aperti relativamente compatti a frontiera differenziabile in X che contengano i supporti delle forme da integrare) una forma bilineare:

$$H^p_c(X) \times H^p(X) \to \mathbb{R}$$

Restringeremo la discussione a varietà di *tipo finito* intendendo con ciò varietà che possiedano un ricoprimento buono finito. Dimostreremo il seguente:

Teorema 54 (Dualità di Poincaré) *Se X è una varietà di dimensione n di tipo finito, allora tutti i suoi spazi di coomologia e di coomologia a supporti compatti sono di dimensione finita e le applicazioni bilineari:*

$$H^p_c(X) \times H^{n-p}(X) \to \mathbb{R}$$

sono delle dualità

La dimostrazione di questo teorema verrà fatta per induzione sul numero r di aperti di un ricoprimento buono di X. Il caso $r = 1$, ossia $X = \mathbb{R}^n$, segue dai lemmi di Poincaré svolti nel prossimo paragrafo. Nel paragrafo successivo verranno introdotti metodi di algebra omologica che permetteranno di dedurre il caso $r + 1$ dal caso r.

Premettiamo alla dimostrazione alcune osservazioni e la descrizione di alcuni esempi che illustrano quel che succede in generale. In particolare indicheremo come si possa verificare direttamente con considerazioni abbastanza semplici il teorema di dualità se si conosce esplicitamente la geometria di X, come ad esempio per le superficie orientate di tipo finito. In dimensioni superiori invece, è spesso il teorema di dualità che permette di scoprire proprietà di X indipendentemente da descrizioni esplicite della varietà.

Notazioni : nel seguito, per $r > 0$ indicheremo con $D = D(r)$ il disco chiuso di centro 0 e raggio r in $\mathbb{R}^2$ e con $C = C(r)$ il suo complementare in $\mathbb{R}^2$.

Sia quindi X una varietà di dimensione 2 orientata e che supporremo connessa con un qualche punto base x_0 fissato.

Grado zero: Per definizione $H^0(X)$ è costituito dalle funzioni differenziabili su X (sono le 0-forme) che hanno differenziale nullo, ossia le funzioni localmente costanti; quindi la sua dimensione "conta" quante sono le componenti connesse di X. Per $H_c^0(X)$ si ottengono le funzioni localmente costanti a supporto compatto; quindi la sua dimensione "conta" quante componenti connesse di X sono compatte.

Grado 2: $\int_X : A_c^2(X) \to \mathbb{R}$ induce un isomorfismo di $H_c^2(X)$ su $\mathbb{R}$; ossia tale coomologia è generata da una qualsiasi $2-$forma ω a supporto compatto che abbia integrale non nullo su X. Per X non compatta si ha $H^2(X) \simeq (0)$.
Verifichiamo dapprima che nel caso $X = \mathbb{R}^2$ si ha $H^2(X) \simeq (0)$; infatti se $\omega = f dx_1 \wedge dx_2$ è una $2-$forma allora $\alpha = F(x)dx_2$ è una sua primitiva se $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f$ e per una tale F si può prendere ad esempio $F = \int_0^{x_1} f(t, x_2)dt$.

Dobbiamo ora dimostrare che se ω è una 2-forma a supporto compatto che ha integrale nullo su X, allora essa ha una primitiva a supporto compatto. Esaminiamo dapprima il caso $X = \mathbb{R}^2$. Essendo $H^2(X) \simeq (0)$, esiste una $1-$forma α con $d\alpha = \omega$. Essendo ω a supporto compatto, esiste $r > 0$ tale che $\omega = 0$ su $C(r)$; quindi la restrizione di α a $C(r)$ è chiusa. Essa è esatta su $C(r)$, se ha tutti i periodi nulli: basterà mostrare che per $R > r$ si ha $\int_{\partial D(R)} \alpha = 0$; per la formula di Stokes tale integrale coincide con $\int_{D(R)} d\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \omega$ che è nullo per ipotesi. Quindi esiste una funzione differenziabile $f : C(r) \to \mathbb{R}$ tale che $df = \alpha$. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile che sia nulla su $D(2)$ ed identicamente 1 su $C(3)$; allora $\tilde{f} = \phi \cdot f$ è una funzione differenziabile su $\mathbb{R}^2$ e $\omega = d\tilde{f}$ su $C(3)$ e quindi $\tilde{\alpha} = \alpha - d\tilde{f}$ è una primitiva a supporto compatto per la forma ω.

Da questo fatto si deduce che se ω è una $2-$forma a supporto compatto su $\mathbb{R}^2$ ed V è un aperto in $\mathbb{R}^2$, allora esiste una $1-$forma a supporto compatto α tale che $\tilde{\omega} = \omega + d\alpha$ abbia supporto entro V: basterà prendere per $\tilde{\omega}$ una qualsiasi $2-$forma con supporto entro V ed avente su $\mathbb{R}^2$ lo stesso integrale che ω.

Se ora X è qualsiasi, sia fissato su X un ricoprimento $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di aperti diffeomorfi ad $\mathbb{R}^2$; per mezzo di una partizione dell'unità, possiamo esprimere una qualsiasi $2-$forma a supporto compatto ω come somma finita di forme, ognuna avente supporto entro qualche elemento di $\mathcal{U}$. Se ω' è uno di tali addendi, avente supporto in U_i e questo interseca U_j, per l'osservazione precedente ω' è coomologa (a supporti compatti) ad una forma avente supporto in $U_i \cap U_j$ e quindi in U_j. Proseguendo in questo modo si può sostituire ω' con una forma a supporto entro un U_0 prestabilito (perché X è connessa) senza cambiare la classe di coomologia; ciò può essere fatto per tutti gli addendi di ω ed in definitiva si può assumere sin dall'inizio che ω abbia supporto entro U_0. In tale processo l'integrale della due forma su X non cambia e quindi se la forma aveva integrale nullo su X anche la sua coomologa con supporto in U_0 avrà integrale nullo su $U_0 \simeq \mathbb{R}^2$ ed il risultato precedente dimostra che essa ha una primitiva a supporto compatto.

Mostriamo ora che se X non è compatta, allora $H^2(X) \simeq (0)$. Se ω è una $2-$forma, dobbiamo costruire una sua primitiva. Utilizzeremo un ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ fatto di aperti diffeomorfi ad $\mathbb{R}^n$ e relativamente compatti in X e una partizione dell'unità $(\phi_i)_{i \in I}$ associata.

Le forme $\omega_i = \phi_i \cdot \omega$ formano una famiglia localmente finita e si ha $\omega = \sum \omega_i$. Sia $\int_{U_i} \omega_i = r_i$ per $i \in I$. Se gli r_i sono tutti nulli allora esistono $\alpha_i \in A_c^1(U_i)$ con $d\alpha_i = \omega_i$ che formano una famiglia localmente finita e ponendo $\alpha = \sum \alpha_i$ si ha $d\alpha = \omega$. Per $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j = \emptyset$ sia $\beta_{ij} \in A_c^2(U_i \cap U_j)$ avente integrale 1 e h_{ij} costanti con $h_{ij} = -h_{ji}$; poniamo poi $h_{ij} = 0$ se $U_i \cap U_j = \emptyset$.

Definiamo $\tilde{\omega}_i = \omega_i - \sum_{j\in I} h_{ij}\beta_{ij}$. Evidentemente $\tilde{\omega} = \sum_{i\in I}\tilde{\omega}_i$ è coomologa ad ω e si ha:

$$\tilde{r}_i = r_i - \sum_{j\in I} h_{ij}$$

Quindi avremo dimostrato che ω è integrabile se mostriamo che è possibile determinare le costanti h_{ij} di modo che per ogni $i \in I$ si abbia $\sum_{j\in I} h_{ij} = r_i$.

Siamo così ridotti ad un problema sul grafo i cui vertici sono gli elementi di I e due vertici distinti i e j sono congiunti da uno spigolo se e solo se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$; tale problema risulta risolubile perché il grafo che viene associato ad $\mathcal{U}$ risulta connesso, localmente finito e costituito da infiniti vertici.

Quanto visto dimostra che per ogni superficie orientata connessa X e per $i = 0, 2$ l'applicazione bilineare $H_c^i(X) \times H^{2-i}(X) \to \mathbb{R}$ è una dualità. Esaminiamo adesso il caso $i = 1$.

In un precedente paragrafo (teorema di de Rham) abbiamo mostrato che $H^1(X)$ si identifica allo spazio degli omomorfismi di $\Pi = \pi_1(X, x_0)$ in $\mathbb{R}$. L' omomorfismo ν di $H_c^1(X)$ in $H^1(X)$ è quindi quello che alla classe di una $1-$forma chiusa a supporto compatto associa l'omomorfismo $\Pi \ni \gamma \mapsto \int_\gamma \omega \in \mathbb{R}$. In generale ν non è né iniettiva né surgettiva. Ad esempio per $X = \mathbb{R}^2 - \{0\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ si ha $\Pi \simeq \mathbb{Z}$ e quindi $H^1(X) \simeq \mathbb{R}$ è generato dall'omomorfismo che vale 1 sul generatore di Π. Esso non può essere ottenuto integrando una $1-$forma chiusa a supporto compatto: infatti siccome il generatore di Π è rappresentabile con un laccetto chiuso fuori di un qualsiasi prestabilito compatto in $S^1 \times \mathbb{R}$, ogni 1-forma chiusa in $A_c^1(X)$ avrà periodo nullo su esso (si ricordi che non esistono problemi di punto base perché i periodi di 1-forme chiuse dipendono solo dalla classe di omotopia libera dei laccetti).

Inoltre ν non è iniettiva: ossia se una 1-forma chiusa a supporti compatti ha integrale nullo su ogni elemento di Π non è detto che essa sia esatta, ossia sia il differenziale di una funzione a supporti compatti. Ad esempio si consideri una funzione differenziabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ per $x \geq 1$; tale f può essere pensata come una funzione su $S^1 \times \mathbb{R}$ che non dipende dalla prima coordinata. Allora $\alpha = df$ è una 1-forma chiusa a supporto compatto ma che non può avere primitive a supporto compatto. Si verifica in modo ovvio che tale α è un generatore di $H_c^1(S^1 \times \mathbb{R})$.

Quindi in questo caso $H^1(X) \simeq \mathbb{R}$ è generato da una 1-forma chiusa ω tale che $\int_{S^1\times\{0\}} \omega = 1$ e $H_c^1(X) \simeq \mathbb{R}$ è generato da una 1-forma chiusa α a supporto compatto tale che $\int_{\{1\}\times\mathbb{R}} \alpha = 1$ e ν è l'omomorfismo nullo. E' immediato riconoscere che $\int_X \omega \wedge \alpha = 1$ e questo è appunto quel che afferma il teorema di dualità di Poincaré che è stato verificato così per $X = S^1 \times R$.

E' facile d'altra parte verificare in modo analogo tale teorema nel caso $X = S^1 \times S^1$ o più in generale per una superficie orientata di tipo finito se di essa si sa descrivere un modello esplicito.

Torneremo nel seguito a discutere sulla costruzione classi di coomologia delle forme a partire da descrizioni esplicite di sottovarietà orientate.

Il lemma di Poincaré

Sia X una varietà differenziabile e siano $\phi : X \times [0,1] \to X$ e $j_0, j_1 : X \to X \times [0,1]$ definite per $x \in X$, $t \in [0,1]$ e per $h = 0, 1$, da

$\phi(x,t) = x$ e $j_h(x) = (x, h)$

Lemma 55 *Esiste un operatore lineare* $K : A^{p+1}(X \times [0,1]) \to A^p(X)$ *tale che*

$$(*) \qquad K \circ d + d \circ K = j_1^* - j_0^*$$

Corollario 56 j_0^* *e* j_1^* *coincidono a livello di coomologia di de Rham (da* $H^p(X \times [0,1]$ *a* $H^p(X)$*)*

Corollario 57 (Invarianza omotopica) *Se* X, Y *sono varietà differenziabili e* ϕ_0 , $\phi_1 : X \to Y$ *sono differenziabilmente omotope, allora* ϕ_0^* *e* ϕ_1^* *coincidono (da* $H^p(Y)$ *a* $H^p(X)$
In particolare ogni equivalenza di omotopia (differenziabile) tra varietà induce un isomorfismo degli spazi di coomologia di de Rham

Corollario 58 (Lemma di Poincaré) *Se* X , Y *sono varietà differenziabili ed* Y *è (differenziabilmente) contrattile, allora la proiezione* $\sigma : X \times Y \to X$ *induce un isomorfismo* $\sigma^* : H^p(X) \to H^p(X \times Y)$. *In particolare , se* X *è costituita da un punto, si ha che se* Y *è contrattile,* $H^p(Y)$ *è nullo per* $p > 0$

Dim. (del lemma) Per ogni $(x,t) \in X \times [0,1]$, sia $e = (0,1) \in T(X)_x \bigoplus \mathbb{R} = T(X \times [0,1])_{(x,t)}$ il vettore tangente "verticale"di lunghezza 1.
Per $\omega \in A^{p+1}(X \times [0,1]$, definiamo $K\omega \in A^p(X)$ ponendo per $x \in X$ e $v_1, \ldots, v_p \in T(X)_x$:

$$K\omega[v_1, \ldots, v_p] = \int_0^1 \omega(x,t)[e, v_1, \ldots, v_p]dt$$

Evidentemente $K\omega$ è una $p-$forma differenziale su X e K è un operatore lineare. Per dimostrare che vale la relazione $(*)$, basterà controllarla sulle forme ω aventi supporto in un aperto del tipo $U \times [0,1] \subset X \times [0,1]$ con U in un ricoprimento fissato di X. Ciò dipende dal fatto che tutti gli operatori T coinvolti nella $(*)$ sono tali che se una forma ω è nulla su $U \times [0,1]$ allora anche $T(\omega)$ lo è e la formula può essere controllata moltiplicando ω per funzioni "test" su X (ossia funzioni differenziabili a supporto compatto).

Si può quindi supporre che ω abbia supporto in $U \times [0,1]$ e che su U esista un sistema di coordinate $x_1, \ldots, x_n$.

Una tale ω sarà somma di elementi del tipo:

I. $f(x,t)dx_{i_0} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$

II. $f(x,t)dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dxi_p$

Se ω è del tipo I. si ha $K\omega = 0$ e quindi anche $dK\omega = 0$. Inoltre :

$$Kd\omega = (\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dxi_p = j_1^*(\omega) - j_0^*(\omega)$$

Se ω è di tipo II. essa è annullata da j_0^* e da j_1^* ed inoltre :

$$dK\omega = \sum_{h=1}^n (\int_0^1 \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_h} dt)dx_h \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

$$Kd\omega = K(\sum_{h=1}^n \frac{\partial f(x,t)}{\partial x_h} dx_h \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = -Kd$$

Lemma di Poincaré per forme a supporti compatti

Sia X una varietà differenziabile. Definiamo un operatore :

$$\Sigma : A_c^{p+1}(X \times \mathbb{R}) \to A_c^p(X)$$

nel modo seguente :
se $\omega \in A_c^{p+1}(X \times \mathbb{R})$, $x \in X$ e $v_1, \ldots, v_p \in T(X)_x$ si pone:

$$(\Sigma\omega)(x)[v_1, \ldots v_p] = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x,t)[e, v_1, \ldots, v_p]dt$$

ove $e \in T(X \times \mathbb{R})$ è definito come nel paragrafo precedente.

Indichiamo con $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$ la proiezione $\pi(x,t) = x$; fissata una volta per tutte una funzione differenziabile $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a supporto compatto e tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds = 1$, definiamo un operatore $\Gamma : A_c^p(X) \to A_c^{p+1}(X \times \mathbb{R})$ ponendo per $\omega \in A_c^p(X)$:

$$\Gamma\omega = \phi(t)dt \wedge \pi^*\omega$$

Lemma 59
1. Sia Σ che Γ commutano, a meno del segno, con gli operatori di differenzazione esterna (precisamente $\Sigma \circ d = -d \circ \Sigma$ e $\Gamma \circ d = -d \circ \Gamma$). Di conseguenza essi inducono omomorfismi $\Sigma_* : H_c^{p+1}(X \times \mathbb{R}) \to H_c^p(X)$ e $\Gamma : H_c^p(X) \to H_c^{p+1}(X \times \mathbb{R})$
2. $\Sigma \circ \Gamma =$identità su $A_c^p(X)$ e quindi $\Sigma_* \circ \Gamma_* =$identità su $H_c^p(X)$
3. Esiste un operatore lineare $K : A_c^{p+1}(X \times \mathbb{R}) \to A_c^p(X \times \mathbb{R})$ tale che :

$$(\natural) \qquad d \circ K + K \circ d = id - \Gamma \circ \Sigma$$

ove id è l'identità su $A_c^{p+1}(X \times \mathbb{R})$. Conseguentemente $\Gamma_* \circ \Sigma_* =$identità su $H_c^{p+1}(X \times \mathbb{R})$ e quindi Γ_* e Σ_* sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro.

Dim. 1. Osserviamo che $d(\phi(t)dt) = 0$. Per $\omega \in A_c^p(X)$ si ha :

$$d(\Gamma\omega) = d(\phi(t)dt \wedge \pi^*(\omega)) = d(\phi(t)dt) \wedge \pi^*(\omega) - \phi(t)dt \wedge d(\pi^*(\omega)) =$$

$$= -\phi(t)dt \wedge \pi^*(d\omega) = -\Gamma(d\omega)$$

Per verificare che $d \circ \Sigma = -\Sigma \circ d$ basta, come nel paragrafo precedente, controllarne i valori su forme aventi supporto compatto in aperti del tipo $U \times \mathbb{R}$ per U in un ricoprimento fissato di X. Possiamo quindi supporre che ω abbia supporto compatto in $U \times \mathbb{R}$ ove U è un aperto di X su cui esistano coordinate $x_1, \ldots, x_n$.

Una tale ω sarà somma di forme del tipo:
I. $\omega = a(x,t)dx_{i_0} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$
II. $\omega = a(x,t)dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$
Caso I. : $\Sigma\omega = 0$ e quindi anche $d \circ \Sigma\omega = 0$. Inoltre:

$$d\omega = \sum_1^n \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_0} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} + \frac{\partial a}{\partial t} dt \wedge dx_{i_0} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Il primo addendo non contiene dt e quindi viene annullato da Γ; il secondo addendo è annullato da Γ perché a è a supporto compatto e quindi è zero per $t >> 0$ o $t << 0$.

Caso II. : $\Sigma\omega = (\int_{-\infty}^{+\infty} a(x,t)dt)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$

$$d\Sigma\omega = \sum_1^n (\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial x_i}(x,t)dt)dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

$$d\omega = \sum_1^n \frac{\partial a}{\partial x_i}(x,t)dx_i \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Per eseguire $\Sigma(d\omega)$ dobbiamo scambiare dx_i con dt e poi integrare da $-\infty$ a $+\infty$: lo scambio fa cambiare segno e integrando si ottiene l'opposto del valore di $d\Sigma\omega$ scritto nel rigo precedente.

E' chiaro ora che se $\omega \in A_c^{p+1}(X)$ è chiusa, $d\omega = 0$, allora $\Sigma d\omega = 0$ e quindi $d(\Sigma\omega) = 0$, ossia $\Sigma\omega$ è chiusa; quindi Σ trasforma forme chiuse in forme chiuse. Inoltre se $\omega' = \omega + d\alpha$, allora $\Sigma\omega' = \Sigma\omega - d\Sigma\alpha$ e quindi la classe di coomologia di $\Sigma\omega$ dipende solo dalla classe di coomologia di ω e si ottiene un omomorfismo $\Sigma_* : H_c^{p+1}(X \times \mathbb{R}) \to H_c^p(X)$. La stesa cosa si ottiene per Γ_*.

La proprietrà 2. è verificata in modo ovvio.

3. Per definire K poniamo $A(t) = \int_{-\infty}^t \phi(s)ds$ e per $\omega \in A_c^{p+1}(X \times \mathbb{R})$, $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ e $v_1, \ldots, v_p \in T(X \times \mathbb{R})_{(x,t)}$:

$$K\omega(x,t)[v_1,\ldots,v_p] = \int_{-\infty}^t \omega(x,s)[e,v_1,\ldots,v_p]ds - A(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x,s)[e,v_1,\ldots,v_p]ds$$

Ancora, per verificare la relazione ($\natural$), si può supporre che ω sia del tipo I. o II.:
caso I. $\omega = a(x,t)dx_{i_0} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$.
Allora $k\omega = 0$ (perché ω non contiene dt) e quindi anche $dK\omega = 0$. Inoltre:

$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial t}(x,t)dt \wedge dx_{i_0} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} + \sum_1^n \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_0} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

$$Kd\omega = (\int_{-\infty}^t \frac{\partial a}{\partial t} ds)dx_{i_0} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = a(x,t)dx_{i_0} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = \omega$$

Quindi $Kd\omega + dK\omega = \omega - \Gamma\Sigma\omega$ perché $\Sigma\omega = 0$ e quindi $\Gamma\Sigma\omega = 0$.
caso II. : $\omega(x,t) = dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$. Si ha:

$$K\omega = (\int_{-\infty}^t a(x,s)ds)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} - A(t)(\int_{-\infty}^{+\infty} a(x,s)ds)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

$$dK\omega = a(x,t)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} + \sum_1^n (\int_{-\infty}^t \frac{\partial a}{\partial x_i}(x,s)ds)dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} -$$

$$-\phi(t)(\int_{-\infty}^{+\infty} a(x,s)ds)dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} - A(t)(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_1^n \frac{\partial a}{\partial x_i}(x,s)ds)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Calcoliamo ora $Kd\omega$:

$$d\omega = -\sum_1^n \frac{\partial a}{\partial x_i}(x,t)dt \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

$$Kd\omega = -\sum_1^n \left(\int_{-\infty}^t \frac{\partial a}{\partial x_i}(x,s)ds\right)dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} +$$

$$+A(t)\sum_1^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_1^n \frac{\partial a}{\partial x_i} ds\right)dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

e quindi ancora $dK + Kd = id - \Gamma\Sigma$.

Corollario 60 *Una n-forma ω a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$ ha una primitiva a supporto compatto se e solo se $\int_{\mathbb{R}^n}\omega = 0$. Più precisamente l'applicazione $A_c^n(\mathbb{R}^n) \ni \omega \mapsto \int_{\mathbb{R}^n}\omega$ induce un isomorfismo tra $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ ed $\mathbb{R}$*

Più in generale se X è una varietà orientata di dimensione n, l'integrale di una n-forma a supporto compatto su X dipende solo dalla sua classe di coomologia a supporto compatto e definisce quindi un omomorfismo $H_c^n(X) \to \mathbb{R}$ che indicheremo con $\int_X$; ciò segue dal fatto (conseguenza della formula di Stokes) che l'integrale del differenziale di una $n-$forma a supporto compatto è nullo.

Proposizione 61 *Sia X è una varietà differenziabile connessa di dimensione n. Se X è orientata, allora $\int_X : H_c^n(X) \to \mathbb{R}$ è un isomorfismo. Se X non è orientabile allora $H_c^n(X) = (0)$*

Dim. Sia $\omega \in A_c^n(X)$ tale che $\int_X \omega = 0$; dobbiamo mostrare che essa ha una primitiva a supporto compatto. Fissiamo un ricoprimento buono $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ di X ed un $U_o \in \mathcal{U}$. Utilizzando una partizione dell'unità ω può essere espressa come una somma finita $\omega_1 + \ldots + \omega_N$ di forme ognuna con supporto in qualcuno degli U_i. Con la stessa argomentazione svolta per le superficie prima del lemma di Poincaré, si mostra che fissato un $i_0 \in I$, ognuna delle ω_i è coomologa (a supporti compatti) ad una che ha supporto in U_{i_0}; quindi ω è coomologa ad una forma con supporto in $U_{i_0} \simeq \mathbb{R}^n$ e avente lo stesso integrale di ω ossia nullo e la questione è ricondotta al caso $X = \mathbb{R}^n$ che è già noto. Anche l'asserzione su $H^n(X)$ nel caso di X connessa ma non compatta si tratta con gli stessi argomenti utilizzati nel caso delle superficie.

Nota. Quest'ultima proposizione fornisce una verifica per $p = 0, n$ del teorema di dualità di Poincaré (che l'accoppiamento $H_c^p(X) \times H^{n-p}(X) \to \mathbb{R}$ è una dualità).

Algebra omologica e teorema di dualità

Introduciamo ora dei metodi, che fanno parte della *algebra omologica*, che costituiscono procedure di calcolo lineare standardizzate, applicabili in svariate circostanze. Gli utilizzeremo in questo paragrafo per costruire le successioni di Mayer-Vietoris e per dare una dimostrazione del teorema di dualità che dovrebbe apparire estremamente semplice, specie se comparata alle trattazioni parziali di tale teorema svolte prima come esempi introduttivi. Un'altra loro utilizzazione verrà mostrata nel prossimo paragrafo in cui si tratta la coomologia relativa.

Chiameremo *complesso* ogni coppia (X, d) ove X è uno spazio vettoriale reale e $d : X \to X$ è un endomorfismo tale che $d \circ d = 0$ che verrà detto *operatore di bordo.*

I *cicli* di X sono gli elementi del nucleo $Z(X)$ di d; i *bordi* di X sono gli elementi dell'immagine $B(X)$ di d e lo spazio vettoriale $H(X) = Z(X)/B(X)$ viene detto l'*omologia* del complesso.

Spesso X sarà *graduato*: ossia è fissata una decomposizione $X = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} X_p$. In tal caso d sarà detto *omogeneo di grado* r se $d(X_p) \subset X_{p+r}$; se $r = -1$ diremo che X è un *complesso di catene*, se $r = 1$ parleremo di *complesso di cocatene*. In tali casi si hanno graduazioni indotte in modo ovvio sugli Z , B ed H i cui fattori verranno indicati con indici in basso nel caso di complessi di catene e con indici in alto per i complessi di cocatene. Nel seguito tratteremo solo complessi di cocatene. Un *morfismo* tra complessi $\phi : (X, d) \to (X', d')$ è un omomorfismo $\phi : X \to X'$ di di spazi vettoriali che commuta con gli operatori di bordo: ossia tale che $\phi \circ d = d \circ \phi$. Ogni tale morfismo induce un omomorfismo $H(X) \to H(X')$ che verrà indicato con $H(\phi)$ o più spesso con ϕ_*.

Si verifica facilmente che H diviene in tal modo un *funtore* della categoria dei complesi su R nella categoria degli spazi vettoriali. Ciò significa che se $\phi : X \to X'$ e $\psi : X' \to X''$ sono morfismi di complessi, allora $H(\psi \circ \phi) = H(\psi) \circ H(\phi)$ e che se id è l'identi tà su X, allora $H(id)$ è l'identità su $H(X)$.

Una costruzione fondamentale della teoria è la seguente; siano $\alpha : X' \to X$ e $\beta : X \to X''$ morfismi di complessi tali che:

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

sia una successione esatta (detta *successione esatta corta*). Allora la successione:

$$H(X') \to H(X) \to H(X'')$$

è esatta ma in generale non lo è la :

$$0 \to H(X') \to H(X) \to H(X'') \to 0$$

Si costruisce comunque in modo "naturale" un omomorfismo
$\delta : H(X'') \to H(X')$ tale che la successione:

$$... \to H(X'') \to H(X') \to H(X) \to H(X'') \to H(X') \to ...$$

sia esatta; tale δ viene detto *operatore di congiunzione* e la successione ottenuta è detta *successione esatta lunga di omologia*. L'affermazione che δ è "naturale" può essere precisata considerando la categoria delle successioni esatte corte di complessi: δ è un "omomorfismo" (ossia quello che nel linguaggio delle categorie viene detto una *trasformazione naturale*) del funtore che ad ogni tale successione associa $H(X'')$ in quello che ad essa associa $H(X')$ e ciò è esprimibile in termini di commutatività dei diagrammi che si ottengono in tale situazione.

La costruzione di δ procede così : Sia $x'' \in X''$ un rappresentante di una classe $h'' \in H(X'')$; quindi $d(x'') = 0$. Essendo β surgettiva esiste $x \in X$ con $\beta(x) = x''$. Consideriamo $y = dx$; allora $\beta(y) = \beta d(x) = d\beta(x) = d(x'') = 0$ ed essendo $ker(\beta) = Im(\alpha)$ esiste $y' \in X'$ con $\alpha(y') = y$. Si verifica che $d(y') = 0$ e si definisce come $\delta(h)$ la classe determinata da y' in $H(X')$.

Che tale $\delta(h)$ non dipende dalle scelte fatte e che quindi dipende solo da h, che δ è un omomorfismo di $H(X'')$ in $H(X')$ e che la successione esatta lunga è effettivamente esatta, è dimostrabile con tediose ma banali argomentazioni di tipo lineare.

Se X', X, X'' sono graduati, α e β sono omogenei di grado zero e d ha grado -1 (risp. grado $+1$) si avrà:

$$\delta : H_p(X'') \to H_{p-1}(X') \qquad (risp. \quad \delta : H^p(X'') \to H^{p+1}(X'))$$

Ciò si deduce dalla costruzione sopra descritta la quale utilizza solo operatori di grado zero salvo una volta in cui interviene l'operatore di bordo.

Successioni di Mayer-Vietoris

Siano X_1 , X_2 aperti in X tali che $X = X_1 \cup X_2$; poniamo $X_0 = X_1 \cap X_2$.

Proposizione 62 *Si hanno successioni esatte corte di complessi di cocatene:*

$$0 \to A^p(X) \xrightarrow{j} A^p(X_1) \oplus A^p(X_2) \xrightarrow{\alpha} A^p(X_0) \to 0$$

$$0 \to A^p_c(X_0) \xrightarrow{\iota} A^p_c(X_1) \oplus A^p_c(X_2) \xrightarrow{\beta} A^p_c(X) \to 0$$

ove j ha per componenti le restrizioni da X a X_1 e X_2, α è la differenza delle restrizioni da X_2 e X_1 a X_0, ι ha per componenti meno l' inclusione di $A(X_0)$ in $A(X_1)$ e l'inclusione di $A(X_2)$ in $A(X_0)$ e β è la somma degli omomorfismi associati alle inclusioni di X_1 e X_2 in X.

Dim. Gli unici fatti non completamente banali sono la surgettività di α e di β che sono facilmente dedotte utilizzando una partizione dell'unità relativa al ricoprimento $\{X_1 X_2\}$.

Dalla precedente proposizione si ottengono con la costruzione descritta sopra le *successioni di Majer-Vietoris* di coomologia e di coomologia a supporti compatti seguenti:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^p(X) \xrightarrow{j_*} H^p(X_1) \oplus H^p(X_2) \xrightarrow{\alpha_*} H^p(X_0) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(X) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^p_c(X_0) \xrightarrow{\iota_*} H^p_c(X_1) \oplus H^p_c(X_2) \xrightarrow{\beta_*} H^p_c(X) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}_c(X_0) \xrightarrow{\iota_*} \cdots$$

Una conseguenza dell'esistenza di tali successioni è ad esempio che se X_0 , X_1 e X_2 hanno tutti gli spazi di coomologia di dimensione finita, anche X ha tale proprietà; od anche che se X ed X_0 la verificano tale condizione, lo stesso accade per X_1 e X_2. Stessa cosa per la coomologia a supporti compatti. Ciò dimostra quindi che ogni varietà di tipo finito ha coomologia e coomologia a supporti compatti di dimensione finita. Per una tale varietà ha quindi senso definire la *caratteristica di Eulero-Poincaré* come l'intero $\chi(X) = \sum_0^n (-1)^i dim H^i(X)$; una conseguenza del teorema di dualità è che essa coincide con l'analoga definita utilizzando gli spazi di coomologia a supporti compatti.

Il lemma dei cinque

Sia dato un diagramma di spazi vettoriali e omomorfismi:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 & & \\
\cdots & \longrightarrow & B_1 & \underset{\beta_1}{\longrightarrow} & B_2 & \underset{\beta_2}{\longrightarrow} & B_3 & \underset{\beta_3}{\longrightarrow} & B_4 & \underset{\beta_4}{\longrightarrow} & B_5 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

in cui le due righe siano successioni esatte ed il diagramma sia commutativo. Il lemma in questione asserisce che se f_1, f_2, f_4, e f_5 sono isomorfismi allora anche f_3 è un isomorfismo. La dimostrazione si fa "camminando" sul diagramma: se $x_3 \in A_3$ va a zero in B_3 allora la sua immagine in A_4 deve essere zero, perché va a zero in B_4 e f_4 è un isomorfismo; quini a_3 proviene da un $a_2 \in A_2$. Continuando così si dimostra anche che a_2 proviene da un $a_1 \in A_1$ e siccome $\alpha_2 \circ \alpha_1 = 0$ ciò dice che $a_3 = 0$ e quindi f_3 è iniettiva. Con un ragionamento analogo ("duale" in un senso che potrebbe essere precisato) si ottiene che f_3 è anche surgettiva.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di dualità per varietà di tipo finito ragionando per induzione sul numero N di aperti di un ricoprimento semplice di X: se $N = 1$, allora X è diffeomorfa ad $\mathbb{R}^n$ ed il risultato è dato dai lemmi di Poincaré. Per il passaggio da N ad $N+1$ sarà sufficiente dimostrare che se due aperti X_1 , X_2 di cui X sia unione verificano il teorema di dualità assieme ad X_0 allora anche X lo verifica. Per dimostrare ciò interpretiamo per ogni varietà X l'applicazione bilineare $H_c^p(X) \times H^{n-p}(X) \to \mathbb{R}$ come una applicazione lineare $H_c^p(X) \to (H^{n-p}(X))^*$ che possiamo chiamare *omomorfismo di Poincaré*; l'affermazione da dimostrare è che quest'ultimo è un isomorfismo. Dualizzando la successione di Mayer-Vietoris relativa alla coomologia di X si ottiene un diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\delta} & H_c^p(X_0) & \xrightarrow{\iota_*} & H_c^p(X_1) \oplus H_c^p(X_2) & \xrightarrow{\beta_*} & H_c^p(X) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n-p}(X_0)^* & \xrightarrow{j_*^*} & H^{n-p}(X_1)^* \oplus H^{n-p}(X_2)^* & \xrightarrow{\alpha_*^*} & H^{n-p}(X)^* & \xrightarrow{\delta^*} & \cdots
\end{array}$$

in cui la prima riga (successione di Mayer-Vietoris di coomologia a supporti compatti) e la seconda riga (dualizzata della successione di Mayer-Vietoris di coomologia, in cui gli apici * indicano il passaggio a spazi ed omomorfismi duali) sono esatte e le frecce verticali sono gli omomorfismi di Poincaré. Se mostreremo che tale diagramma è commutativo, applicando il lemma dei 5 avremo concluso la dimostrazione.

In realtà vedremo ora che tale diagramma è solo commutativo a "meno dei segni"; ma è evidente che il lemma dei 5 vale anche in tale circostanza.

Consideriamo il "quadrato":

$$\begin{array}{ccc}
H_c^p(X) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{p+1}(X_0) \\
\downarrow p_X & & \downarrow p_{X_0} \\
H^{n-p}(X)^* & \underset{\delta^*}{\longrightarrow} & H^{n-p-1}(X_0)^*
\end{array}$$

ove p_X e p_{X_0} sono gli omomorfismi di Poincaré. Sia ω una $p-$forma a supporto compatto rappresentante una classe $[\omega] \in H_c^p(X)$; per calcolare la sua immagine tramite $p_{X_0} \circ \delta$ rileviamo dapprima ω in $H_c^p(X_1) \sum H_c^p(X_2)$ ottenendo $\phi_1\omega, \phi_2\omega)$ con ϕ_1, ϕ_2 una partizione dell'unità per il ricoprimento X_1, X_2. Allora $d(\phi_2\omega)$ rappresenta la classe $\delta[\omega]$; il valore di $p_{X_0}\delta[\omega]$ sulla classe di una θ chiusa in $A^{n-p-1}(X_0)$ è quindi dato da:

$$\int_{X_0} d(\phi_2\omega) \wedge \theta = \int_{X_0} d\phi_2 \wedge \omega \wedge \theta$$

Consideriamo ora la composizione $\delta^* \circ p_X$. Rilevando la forma θ tramite α si ottengono le forme $-\phi_2\theta \in A^{n-p-1}(X_1)$ e $\phi_1\theta \in A^{n-p-1}(X_2)$ i cui differenziali coincidono su X_0 e definiscono quindi una $(n-p)$-forma chiusa σ su X ; tenendo conto che il supporto di σ è contenuto in X_0 e che quindi in X_0 si ha $\sigma = d(-\phi_2\theta) = -d\phi_2 \wedge \theta$ si ha che

il valore dell'immagine della classe di ω tramite l'omomorfismo $\delta^* \circ p_X$ sulla classe di θ è dato da:

$$\int_X \omega \wedge \sigma = -\int_{X_0} \omega \wedge d\phi_2 \wedge \theta$$

e quindi il quadrato è commutativo a meno di un fattore $(-1)^{p+1}$.

Gli altri tipi di quadrati della successione che compara gli omomorfismi di Poincaré sono invece commutativi, come si verifica facilmente esplicitando le definizioni.

Periodi di 1-forme chiuse

Siano X una varietà differenziabile connessa, $x_0 \in X$ e ω una 1-forma chiusa su X. Se X è semplicemente connessa, esiste una primitiva $f : X \to \mathbb{R}$ di ω con $f(x_0) = 0$; tale f può essere costruita così : per ogni $x \in X$, $f(x) = \int_\gamma \omega$ ove γ è un qualsiasi cammino differenziabile da x_0 ad x. Esaminiamo il caso $\pi_1(X, x_0) \neq 0$. Sia $\phi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x)$ il rivestimento universale di X. Allora $\tilde{\omega} = \phi^*\omega$ è chiusa in $\tilde{X}$ ed esiste quindi una $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ con $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = 0$ e $d\tilde{f} = \tilde{\omega}$. Il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ opera su $\tilde{X}$ come gruppo di omeomorfismi; si ha inoltre un omomorfismo $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ definito da $\sigma(\gamma) = \int_\gamma \omega$ e si ha $\tilde{f}(\gamma x) = \tilde{f}(x) + \sigma(\gamma)$. Il sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$ dato dall'immagine di σ è detto *gruppo dei periodi* di ω; se esso è nullo, $\tilde{f}$ è invariante per l'azione di $\pi_1(X, x_0)$ e definisce quindi una primitiva di $f : X \to \mathbb{R}$ con $f(x_0) = 0$.

Supponiamo che il sottogruppo dei periodi di ω sia discreto non nullo: ossia che esso sia l'insieme dei multipli interi di un $a \in \mathbb{R}$. Allora, posto $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \simeq S^1$ si ha una unica $f : X \to S^1$ con $f(x_0) = 1$ e $f \circ \phi = \tau\tilde{f}$. Tale f soddisfa la seguente proprietà: se $d\theta$ è la 1-forma su S^1 invariante per traslazioni e tale che $\int_{S^1} d\theta = 1$ allora $\omega = f^*(ad\theta)$. L'omomorfismo $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}$ si fattorizza quindi così :

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}$$

ove λ è la moltiplicazione per a.

Ma in generale il sottogruppo dei periodi di ω non è discreto in $\mathbb{R}$. Ad esempio per $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e $\omega = dx_1 + \sqrt{2}dx_2$, il sottogruppo dei periodi è il gruppo Γ generato in $\mathbb{R}$ da 1 e $\sqrt{2}$ che è denso in $\mathbb{R}$. Il quoziente $\mathbb{R}/\Gamma$ non ha quindi strutture geometriche naturali (ad esempio la sua topologia quoziente è quella banale). Si prova allora a rifare quanto precede simultaneamente per più forme: siano $\omega_1, \ldots, \omega_r$ assegnate 1-forme chiuse sulla varietà connessa X; si ha allora una applicazione differenziabile $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_r) : \tilde{X} \to \mathbb{R}^r$ tale che $\tilde{f}(x_0) = 0$ e $d\tilde{f} = (\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_r)$ ove $\tilde{\omega}_i = \phi^* \omega_i$.

Si considera ora l'omomorfismo $\sigma : \pi_1(X, x_0) \to \mathbb{R}^r$ definito da

$$\sigma(\gamma) = \begin{pmatrix} \int_\gamma \omega_1 \\ \vdots \\ \int_\gamma \omega_r \end{pmatrix}$$

che ha come immagine in $\mathbb{R}^r$ un sottogruppo Γ che verrà detto *gruppo dei periodi simultanei* di $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$. Se Γ è discreto in $\mathbb{R}^r$, allora $\mathbb{R}^r/\Gamma$ è una varietà differenziabile (diffeomorfa al prodotto $(S^1)^h \times \mathbb{R}^{r-h}$ ove h è il rango di Γ) e si costruisce come sopra una $f : X \to \mathbb{R}^r/\Gamma$ con $f(x_0) = 0$ e $f^*(dx_i) = \omega_i$ per $i = 1, \ldots, r$ (ove $x_1, \ldots, x_r$ sono le coordinate di $\mathbb{R}^r$).

Vediamo un caso particolare in cui ciò accade che è sostanzialmente modellato sul cosidetto metodo di inversione degli *integrali ellittici* che verrà esaminato nell'ambito delle funzioni di variabile complessa.

Teorema 63 *Sia X una varietà differenziabile connessa e compatta di dimensione n e siano $\omega_1, \ldots \omega_n$ 1-forme chiuse su X tali che per ogni $x \in X$, $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)$ siano una base del duale di $T_x(X)$. Allora il gruppo Γ dei periodi è discreto di rango n e l'applicazione f da X nel toro n-dimensionale $\mathbb{R}^n/\Gamma$ ottenuta integrando le 1-forme date è un diffeomorfismo.*

Dim. Consideriamo come sopra l'applicazione $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}^n$ ottenuta integrando le $\tilde{\omega}_i = \phi^*(\omega_i)$ sul rivestimento universale $\phi : \tilde{X} \to X$ a partire dal punto base $\tilde{x}_0$. Mostreremo che essa è un rivestimento: essendo $\mathbb{R}^n$ semplicemente connessa ne seguirà che essa è un diffeomorfismo. Per dimostrare che è un rivestimento mostreremo il fatto seguente (vedi la nota che segue la dimostrazione) che per semplicità di esposizione sarà formulato in termini di una metrica su X compatibile con la sua topologia (ad esempio quella indotta da una sua realizzazione come sottovarietà di $\mathbb{R}^n$):

- $\tilde{f}$ è localmente invertibile in modo uniforme nel senso che esiste un $r > 0$ tale che per ogni $x \in \tilde{X}$, $\tilde{f}$ induce un diffeomorfismo tra un intorno aperto di x in $\tilde{X}$ ed un aperto contenente la palla di centro $\tilde{f}(x)$ e raggio r in X.

Ed infatti $\tilde{f}$ è un diffeomorfismo locale perché $d\tilde{f} = (\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n)$ è per ipotesi unisomorfismo tra $T_x(\tilde{X})$ e $\mathbb{R}^n$. Inoltre in due punti aventi la stessa proiezione su X, $\tilde{f}$ differisce di una costante additiva e dà quindi la stessa *copertura* dell'immagine in $\mathbb{R}^n$; essendo X compatta si deduce l'esistenza di un $r > 0$ come richesto.

Resta da verificare che nel rivestimento $\tilde{f}^{-1} \circ \phi : \mathbb{R}^n \to X$, due punti di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa immagine in X se e solo se differiscono per un elemento di Γ. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ con la stessa immagine $x$in X; quindi provengono da punti $a, b \in \tilde{X}$ che si proiettano in x. Sia γ un cammino continuo in $\tilde{X}$ da a a b e sia $\bar{\gamma}$ la sua immagine in X; i valori α, β di $\tilde{f}$ in a, b differiscono per

$$\alpha - \beta = \begin{pmatrix} \int_\gamma \tilde{\omega}_1 \\ \vdots \\ \int_\gamma \tilde{\omega}_n \end{pmatrix}$$

Essendo $\int_\gamma \tilde{\omega}_i = \int_{\tilde{\gamma}} \omega_i$ per tutti gli i, tale differenza è uno dei periodi simultanei. Siano ora $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Gamma$ e $a, b \in \tilde{X}$ le controimmagini tramite $\tilde{f}$ di α e $\alpha + \lambda$. Dobbiamo mostrare che a e b hanno la stessa proiezione in X. Sia λ ottenuto integrando le ω_i su un cammino chiuso γ che possiamo prendere di origine $\phi(a)$. Rilevando γ in $\tilde{X}$ a partire da a, si terminerà in un punto a' che ha la stessa immagine di a in X. Siccome il valore di $\tilde{f}$ in a' differisce come b da quello in a ed $\tilde{f}$ è iniettiva, si ha $a' = b$ e quindi a e b hanno la stessa immagine in X.
Il fatto che Γ è discreto di rango massimo deriva dal fatto che X è di Hausdorff e compatta.

Nota. Ogni spazio topologico di cui si parlerà in questa nota sarà supposto di Hausdorff, localmente contrattile (ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni che sono contrattili) e metrico, anche se gran parte di queste condizioni sono sovrabbondanti per i risultati che otterremo.

La nozione di rivestimento può essere introdotta in tre modi equivalenti; alla base di tutti cè una applicazione continua $\phi : X \to Y$ tra spazi topologici connessi che è localmente invertibile nel senso che :

($\sharp$) ogni $x \in X$ ha un intorno aperto U tale che $V = \phi(U)$ è aperto in Y e ϕ dà un omeomorfismo tra U e V.

Una *sezione* di ϕ su un sottoinsieme $V \subset Y$ è una applicazione continua $s : V \to X$ tale che $\phi \circ s$ sia l'identità su V. Se la ($\sharp$) è valida, l'insieme dei punti ove due sezioni di ϕ su V coincidono è aperto e chiuso in V quindi vuoto o tutto V nel caso questo sia connesso.

Def. Una applicazione ϕ come sopra è detta un *rivestimento* se una delle seguenti condizioni equivalenti è verificata:

1) ogni $y \in Y$ ha un intorno connesso V tale che $\phi^{-1}(V)$ sia l'unione (necessariamente disgiunta per quanto osservato sopra) delle immagini delle sezioni di ϕ su V; ossia ogni sua componente connessa è omeomorfa a V tramite ϕ.

2) esiste una funzione continua positiva $\epsilon : Y \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $y \in Y$ ed $x \in \phi^{-1}(y)$, esiste una sezione s di ϕ sulla palla di centro y e raggio $\epsilon(y)$ tale che $s(y) = x$.

3) *sollevamento dei cammini*: per ogni cammino continuo $\beta : [0,1] \to Y$ ed ogni $x \in \phi^{-1}(\beta(0))$ esiste un cammino $\alpha : [0,1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\phi \circ \alpha = \beta$.

La validità della condizione ($\sharp$), nel caso di una applicazione tra varietà differenziabili, è assicurata se ϕ non ha punti critici. Le condizioni equivalenti 1) , 2) e 3) sono allora automatiche se ϕ è propria; se essa non lo è, può invece accadere che l'intorno V di un $y \in Y$ sul quale ϕ si inverte non si possa scegliere indipendentemente da $x \in \phi^{-1}(y)$ e diviene allora necessario stimare quanto grande sia per $x \in X$ l'intorno V di invertibilità di ϕ fornito dal teorema di inversione locale al variare di $\phi(x)$ in Y.

La condizione 1) è quella di solito utilizzata per definire i rivestimenti. La 2) è stata espressa utilizzando una metrica su Y unicamente perché è spesso più facile esprimere maggiorazioni in termini numerici che insiemistici; ma per dimostrare che essa è equivalente alla 1), è più semplice utilizzare la sua seguente formulazione equivalente che non fa ricorso a metriche anche se può apparire a prima vista meno chiara:

2') Esiste un intorno $\mathcal{V}$ della diagonale di $Y \times Y$ tale che per ogni $y \in Y$, detto V il sottoinsieme di Y per cui $\{y\} \times V = (\{y\} \times Y) \cap \mathcal{V}$ per ogni $x \in \phi^{-1}(y)$, esiste una sezione s di ϕ su V con $s(y) = x$.

Per mostrare l'equivalenza tra le 1)-2) e la 3), la parte più difficile è dimostrare che da 3) segue 2). La dimostreremo come corollario del seguente:

Teorema 64 (di Monodromia) *Sia $\phi : X \to Y$ una applicazione continua verificante la condizione ($\sharp$) e quella sul sollevamento dei cammini. Allora ogni omotopia su Y si solleva in una omotopia su X se è fissato il suo sollevamento sulla faccia iniziale. Precisamente: se Z è uno spazio topologico e $f_0 : Z \to X$ e $F : Z \times [0,1] \to Y$ sono continue con $\phi(F(z,0)) = f_0(z)$ per ogni $z \in Z$, allora esiste $G : Z \times [0,1] \to X$ continua e tale che $\phi(G(z,t)) = F(z,t)$ e $G(z,0) = f_0(z)$ per ogni $(z,t) \in Z \times [0,1]$*

Dim. Per la condizione 3) si sollevano (in modo unico perché vale la ($\sharp$)) tutti i cammini dati dalla restrizione di F agli $\{z\} \times [0,1]$ a partire dagli $f_0(z)$; si trova quindi una $G : Z \times [0,1] \to X$ che solleva la F con le condizioni richieste salvo la continuità che è assicurata solo nella seconda variabile ogni volta che fissiamo la prima. Basterà quindi verificare che ogni $z \in Z$ ha un intorno A tale che G ristretta a $A \times [0,1]$ è continua; ed infatti, fissato z, esiste una decomposizione $0 = t_0 \leq \cdots \leq t_r = 1$ ed aperti $U_i \subset X$ e $V_i \subset Y$ per $i = 1, \ldots, r-1$, tali che ϕ è un omeomorfismo tra U_i e V_i e $G(\{z\} \times [t_i, t_{i+1}] \subset U_i$. Per ogni $i = 1, \ldots, r-1$, esiste poi un intorno A_i di z in Z, tale che $F(\{z\} \times [t_i, t_{i+1}] \subset V_i$. Detta A l'intersezione degli A_i, si avrà un sollevamento continuo della restrizione di F ad $A \times [0,1]$ costruita utilizzando gli omeomorfismi dagli U_i ai V_i che per l'unicità osservata sopra coincide con la restrizione di G a $A \times [0,1]$ e ciò conclude la dimostrazione.

Corollario 65 *Nelle ipotesi del precedente teorema, dati due cammini in Y aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale omotopi per una omotopia a estremi fissi, ogni due loro sollevamenti aventi stesso punto iniziale terminano nello stesso punto.*

Dim. Si sollevi l'omotopia tra i due cammini considerandola come una omotopia di faccia iniziale costante nel punto di inizio comune dei due cammini. Allora il cammino faccia finale del sollevamento è a valori nella fibra di ϕ sopra il punto finale dei cammini; essendo questa discreta tale cammino è costante.

Corollario 66 *Nelle ipotesi del precedente teorema, se V è un aperto semplicemente connesso di Y, ogni componente connessa U di $\phi^{-1}(V)$ è applicata da ϕ su V con un omeomorfismo.*

Dim. Essendo ϕ continua ed aperta (su X) basta dimostrare che $\phi : U \to V$ è biunivoca. Se $x_1, x_2 \in U$ hanno la stessa immagine y in V, si consideri un cammino da x_1 a x_2; la sua immagine in V sarà un cammino chiuso in V di origine y. Esso è omotopo al cammino costante in y perché V è semplicemente connesso. Utilizzando il corollario precedente si ottiene che $x_1 = x_2$ e quindi l'applicazione da U a V è uniettiva. Per la surgettività, dato $y \in V$, si scelgano un qualsiasi $x \in U$ ed un cammino da $\phi(x)$ a y; il sollevamento di tale cammino con origine x avrà punto finale un punto che si proietta in y.

Il teorema che segue, anche se non appare evidente a prima vista, è essenzialmente una riformulazione del teorema di de Rham.

Teorema 67 *Sia X una varietà differenziabile compatta e connessa. Allora:*
1) $H^1_{DR}(X)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita r
2) se $\omega_1, \ldots, \omega_r$ sono 1-forme chiuse su X che inducono una base di $H^1_{DR}(X)$, il gruppo Γ dei periodi da esse determinato è un sottogruppo discreto di rango massimo (quindi r, cosicché $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^r$) in $\mathbb{R}^r$ e quindi $\mathcal{T}(X) = \mathbb{R}^r/\Gamma$ è un toro di dimensione r
3) sia fissato $x_0 \in X$; esiste una ed una sola $f : (X, x_0) \to (\mathcal{T}(X), 0)$ differenziabile e tale che dette $d\theta_1, \ldots, d\theta_r$ le 1-forme chiuse su $\mathcal{T}(X)$ indotte dai differenziali $dx_1, \ldots, dx_r$ delle coordinate su $\mathbb{R}^r$, si abbia $\omega_i = f^*(d\theta_i)$ per $i = 1, \ldots, r$
4) la f del punto precedente classifica le classi di omotopia di X nei quozienti di $\mathbb{R}^m$ per sottogruppi discreti nel senso seguente:
se $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ è un sottogruppo discreto, la composizione con f stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $\{$omomorfismi differenziabili di $\mathcal{T}(X)$ in $\mathbb{R}^m/\Delta\}$ e l'insieme $[(X, x_0), (\mathbb{R}^m/\Delta, 0)]$ delle classi di omotopia di applicazioni differenziabili di (X, x_0) in $(\mathbb{R}^m/\Delta, 0)$

Dim. Essendo X compatta il gruppo fondamentale $\Pi = \pi_1(X, x_0)$ è finitamente generato; di coseguenza $Hom(\Pi, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita e quindi il punto 1) è dimostrato dal teorema di de Rham.

Alla applicazione bilineare $H^1_{DR}(X) \times \Pi \to \mathbb{R}$ definita da $(\omega, \gamma) \to \int_\gamma \omega$ è associato un omomorfismo $\sigma : \Pi \to Hom(H^1_{DR}(X), \mathbb{R})$; utilizzando su $Hom(H^1_{DR}(X), \mathbb{R})$ la base duale di quella indotta da $\omega_1, \ldots, \omega_r$ su $H^1_{DR}(X)$, l'immagine di σ diviene precisamente il sottogruppo dei periodi Γ associato alle ω_i. Utilizzando il teorema di de Rham, ci si riduce quindi a studiare l'immagine del gruppo fondamentale Π nell'omomorfismo naturale:

$$\Pi \to Hom(Hom(\Pi, \mathbb{R}), \mathbb{R})$$

Se Π' è l'abelianizzato di Π, si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\sigma} & Hom(Hom(\Pi, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \Pi' & \xrightarrow{\sigma'} & Hom(Hom(\Pi', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array}$$

nel quale ρ è chiaramente un isomorfismo perché $\mathbb{R}$ è abeliano.
Analogamente se Π'' è il quoziente di Π' modulo il sottogruppo di torsione, si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Pi' & \xrightarrow{\sigma'} & Hom(Hom(\Pi', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho'} \\ \Pi'' & \xrightarrow{\sigma'} & Hom(Hom(\Pi'', \mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array}$$

nel quale ρ' è un isomorfismo perché $\mathbb{R}$ è privo di torsione. In definitiva si può supporre che Π sia abeliano senza torsione ed essendo inoltre finitamente generato esso sarà isomorfo a $\mathbb{Z}^m$ per qualche intero m; dovrà essere necessariamente $m = r$ perché $Hom(\Pi, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^r$. E' poi evidente che l'omomorfismo naturale $\mathbb{Z}^r \to Hom(Hom(\mathbb{Z}^r, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ è l'inclusione $\mathbb{Z}^r \subset \mathbb{R}^r$ e ciò dimostra il punto 2).

Per la 3) si costruisce la f applicando un $x \in X$ nel vettore avente per componenti gli integrali delle ω_i su un qualsiasi cammino da x_0 ad x: riducendo

modulo Γ tale applicazione diviene ben definita e verifica ovviamente le condizioni richieste.
Dimostriamo la 4):
surgettività: sia $g : X \to \mathbb{R}^m/\Delta$ differenziabile ove Δ è un sottogruppo discreto in $\mathbb{R}^m$. Dette $y_1, \ldots y_m$ le coordinate su $\mathbb{R}^m$, poniamo $\alpha_i = g^*(dy_i)$ per $i = 1, \ldots, m$. Per l'ipotesi fatta sulle ω_i, esisteranno delle relazioni:

$$\alpha_i = \sum_j c_{ij}\omega_j + df_i$$

ove alla matrice C fatta con i c_{ij} è associata una applicazione lineare di $\mathbb{R}^r$ in $\mathbb{R}^m$ che applica Γ entro Δ e quindi definisce un omomorfismo (differenziabile) $\beta : \mathcal{T}(X) \to \mathbb{R}^m/\Delta$. Resta da dimostrare che $\beta \circ f$ è omotopa a g. L'omotopia viene realizzata integrando le m 1-forme:

$$\sum_i c_{ij}\omega_j + tdf_i$$

per $t \in [0,1]$ e $i = 1, \ldots, m$.
iniettività: se $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}^m/\Delta$ sono omotope, allora per ogni $i = 1, \ldots, m$ le forme $g_1^* dy_i$ e $g_2^* dy_i$ individuano la stessa classe di coomologia su X ossia, a meno di differenziali esatti, sono espresse dalla stessa combinazione lineare delle ω_j: i coefficienti di tali combinazioni sono appunto quelli che determinano l'omomorfismo di $\mathcal{T}(X)$ in $\mathbb{R}^m/\Delta$ che composto con f dà una applicazione omotopa alle g_i ; tali omomorfismi sono quindi univocamente determinati dalla classe di omotopia delle loro composizioni con f.

Coomologia relativa e applicazioni

Sia M una varietà compatta e X una sua sottovarietà chiusa. Si ha una successione esatta:

$$0 \to A^p(M,X) \to A^p(M) \to A^p(X) \to 0$$

ove $A^p(M,X)$ è lo spazio delle p-forme su M che sono nulle nei punti di X; la sua coomologia sarà detta *coomologia relativa* di M *modulo* X e sarà indicata con $H^p(M,X)$.

Lemma 68 *L'inclusione $j : A_c^p(M - X) \to A^p(M,X)$ induce un isomorfismo $j_* : H_c^p(M - X) \to H^p(M,X)$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.*

Dim. Surgettività: sia ω una p-forma chiusa su M nulla su X; si deve mostrare che esiste una $(p-1)$-forma α chiusa su M e nulla su X tale che $\omega - d\alpha$ sia a supporto compatto in $M - X$. Si fissi un intorno tubolare aperto T di X in M e sia $r : T \to X$ la retrazione associata. Essendo l'inclusione $X \to T$ una equivalenza di omotopia, essa induce un isomorfismo in coomologia di de Rham ed essendo ω nulla su X, essa è esatta su X e quindi esatta su T: sia α una $(p-1)$-forma su T con $d\beta = \omega$; se $\phi : M \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile con supporto in T e eguale ad 1 in un intorno di X, allora $\alpha' = \phi\alpha$ è una $(p-1)$-forma su M e $\omega - d\alpha'$ è a supporto compatto in $M - X$. Basterà quindi mostrare che tale α può essere scelta nulla su X. Osserviamo che la restrizione di α ad X è chiusa perché $d\alpha = \omega$ vicino ad X e ω è nulla su X e quindi la $(p-1)$-forma $\tilde{\alpha}$ ottenuta restringendo α ad X e poi rilevandola su T tramite r^*, è chiusa; la forma $\alpha - \tilde{\alpha}$ verifica così quanto richiesto.

Per la iniettività si ragiona nello stesso modo: se ω è una p-forma a supporto compatto su $M - X$ che è il differenziale di una $(p-1)$-forma $\alpha \in A^p(M, X)$, allora α è chiusa in qualche intorno tubolare T di X in M (perché $d\alpha = \omega$ e $\omega \equiv 0$ vicino ad X). Quindi α è esatta in tale T (ancora perché $X \to T$ è una equivalenza di omotopia e α è nulla e quindi esatta su X); se β è una $(p-2)$-forma su T con $d\beta = \alpha$ e $\phi : M \to X$ è come sopra, allora $\beta' = \phi\beta$ è una $(p-2)$-forma su M, $\alpha' = \alpha - d\beta'$ è a supporto compatto in $M - X$ e $d\alpha' = d\alpha = \omega$ su M.

Corollario 69 *Se M è una varietà compatta e X una sottovarietà chiusa, si ha una successione esatta:*

$$\cdots \to H_c^p(M - X) \to H^p(M) \to H^p(X) \to H_c^{p+1}(M - X) \to \cdots$$

che viene detta successione di coomologia della coppia (M, X).

Oss. Quanto precede resta valido se M è una varietà compatta avente per bordo X.

Siamo ora in grado di dimostrare che $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non è bordo di alcuna varietà orientata.

Lemma 70 *Sia data una successine esatta di spazi vettoriali di dimensione finita:*

$$0 \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_r \to 0$$

Allora $\quad \sum_1^r (-1)^i dim(A_i) = 0$

Dim. Per $r = 3$ è la formula del rango. Si proceda quindi per induzione nel seguente modo: detta B l'immagine di A_2 in A_3 si considerano le successioni esatte $\quad 0 \to A_1 \to A_2 \to B \to 0 \quad$ e $\quad 0 \to B \to A_3 \to \cdots \to A_n \to 0$.

Corollario 71 *Se M è una varietà compatta a bordo orientabile, il suo bordo X ha caratteristica di Eulero-Poincaré pari.*

Dim. La successione esatta della coppia (M, X) è:

$$\cdots \to H_c^p(M - X) \to H^p(M) \to H^p(X) \to H_c^{p+1}(M - X) \to \cdots$$

Per la dualità di Poincaré $dim H_c^p(M - X) \simeq dim H^{n-p}(M - X)$. L'enunciato si ottiene con il precedente lemma calcolando modulo 2.

Per mostrare che $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non è bordo di alcuna varietà compatta orientata, basterà mostrare che ha caratteristica di Eulero-Poincaré dispari. Ed infatti sappiamo già che $H^0(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \simeq H^4(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}$. Dalla successione esatta della coppia $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$, essendo $P_2(\mathbb{C}) - \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, si ottiene:
$H^1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = (0)$, $H^3(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = (0)$ e $H^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R} \quad$ cosicché $\chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 3$.

Oss. Sia X una varietà orientata. Se $\dim(X)$ è dispari dalla dualità di Poincarè si deduce che $\chi(X) = 0$ e quindi la condizione necessaria che abbiamo trovato per essere un bordo è vuota. Se $n = 2p$, sempre la dualitá di Poincaré dà $\quad \chi(X) \equiv dim(H^p(X)) \quad (mod\ 2)$. In tal caso se p è dispari, la forma bilineare $<\, , >$ su $H^p(X)$ che descriviamo qui sotto, è antisimmetrica e dovendo

essere non degenere, necessariamente $H^p(X)$ deve avere dimensione pari e di conseguenza ogni tale varietà ha caratteristica pari. Così l'unico caso in cui può essere utile applicare il risultato trovato è per varietà di dimensione $4k$, ove abbiamo già visto una applicazione.
Descriviamo adesso un risultato più fine col quale si può dimostrare ad esempio che la somma connessa di due copie di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, pur avendo caratteristica pari, non è un bordo.

Sia X una varietà compatta orientata di dimensione $2n$. Si ha una forma bilineare $< , >$ su $H^n(X)$ ottenuta associando alle classi di coomologia indotte da due n-forme chiuse α, β su X il numero $<\alpha, \beta>= \int_X \alpha \wedge \beta$.

Tale forma bilineare è simmetrica se n è pari, altrimenti è antisimmetrica. Per la dualità di Poincaré è in ogni caso non degenere.

Teorema 72 *Sia X il bordo d'una varietà differenziabile compatta orientabile M. Allora l'immagine A dell'omomorfismo di restrizione $H^n(M) \to H^n(X)$ coincide col proprio ortogonale $A^\perp$ rispetto a $< , >$.*

Dim. Si consideri il diagramma :

$$\begin{array}{ccccc} H^n(M) & \xrightarrow{\alpha} & H^n(X) & \xrightarrow{\beta} & H_c^{n+1}(M-X) \\ & & {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow \\ & & H^n(X)^* & \xrightarrow[\alpha^*]{} & H^n(M) \end{array}$$

ove la prima riga, parte della successione di coomologia della coppia (M, X) è esatta, α^* è la trasposta di α e le frecce verticali sono gli isomorfismi di Poincaré (si noti che $H^n(M)$ è identificabile con $H^n(M - X)$; infatti considerando un intorno tubolare di X in M, si dimostra l'esistenza di una varietà compatta a bordo $M' \subset M - X$ tale che le inclusioni $M' \to M$ e $M' \to M - X$ siano equivalenze di omotopia). Tale diagramma è commutativo: essenzialmente ciò è dimostrato dal fatto che data una n-forma chiusa ω su X e fissata una sua estenzione $\tilde{\alpha}$ ad una n-forma su M che sia chiusa vicino ad X, per ogni n-forma chiusa β su M si ha $d(\tilde{\alpha} \wedge \beta = (d\tilde{\alpha}) \wedge \beta$ e di conseguenza:

$$\int_X \alpha \wedge \beta = \int_M \tilde{\alpha} \wedge \beta$$

Allora un elemento $\omega \in H^n(X)$ è nell'immagine di α, cioè stà in A, se e solo se la sua immagine secondo p , ossia l'omomorfismo da lui indotto tramite $< , >$ va a zero tramite α^*, ossia α appartiene a $A^\perp$.

Corollario 73 *Sia X una varietà di dimensione $4k$ che sia bordo di una varietà compatta orientata M. Allora la segnatura di $< , >$ su $H^{2k}(X)$ è nulla.*

Dim. La forma bilineare $< , >$ sullo spazio vettoriale reale $H = H^{2k}(X)$ è non singolare ed è nulla sul sottospazio vettoriale A che ha dimensione metà di quella di $H^{2k}(X)$; infatti essendo la forma bilineare $< , >$ non singolare si ha $dimA + dimA^\perp = 2dimA = dimH^{2k}(X)$. L'enunciato segue ora dalla caratterizzazione dell'indice di positività e negatività di una forma quadratica in termini della dimensione dei sottospazi sui quali la sua restrizione è definita positiva o negativa.

Esempi di calcolo dell'anello di coomologia

Siano M una varietà orientata di dimensione n di tipo finito e $X \subset M$ una sottovarietà compatta orientata di dimensione p. Essa determina un funzionale $\int_X : A^p(M) \to \mathbb{R}$, ottenuto associando ad ogni p-forma ω su M lo scalare $\int_X \omega$. La formula di Stokes mostra che esso è nullo sulle forme che hanno primitiva e quel che si ottiene quindi è un funzionale su $H^p(M)$ che indicheremo ancora con $\int_X$.

Per il teorema di dualità deve esistere una classe in $H_c^{n-p}(M)$ che rappresenta $\int_X$, ossia deve esistere qualche $(n-p)-$forma ω chiusa e a supporti compatti in M , tale che per ogni forma chiusa $\alpha \in A^p(M)$ si abbia

$$\int_X \alpha = \int_M \alpha \wedge \omega$$

Ogni tale ω sarà detta una *forma duale* di X in M e la sua classe di coomologia in $H_c^{n-p}(X)$, che è univocamente determinata per il teorema di dualità, sarà detta la *classe duale* di X in M.

Supponiamo che M sia una sottovarietà di un $\mathbb{R}^N$; allora esiste $\epsilon > 0$ tale che posto:

$$N = N_\epsilon(X, M) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : x \in X, v \in T(M)_x \cap T(X)_x^\perp\}$$

esiste un diffeomorfismo σ tra N e un intorno aperto T di X in M tale che $\sigma(x, 0) = x$. Tale T, assieme alla retrazione differenziabile $r : T \to X$ corrispondente alla proiezione $N \to X$, viene detto un *intorno tubolare* di X in M.

Teorema 74 *Sia ω una forma duale di X in T; allora essa è anche una forma duale di X in M e per ogni $x \in X$ si ha $\int_{r^{-1}(x)} \omega = 1$.*
Viceversa ogni $(n-p)-$forma chiusa a supporto compatto in T che ha integrale 1 sulle fibre di T induce la classe duale di X in T e quindi anche in M

Dim. Se ω è una forma a supporto compatto in T, essa può essere prolungata a tutto M ponendola zero su $M - X$ ed è chiaro dalla definizione che se essa è una forma duale per X in T lo è anche per X in M.

Sia fissata una tale ω. Per $x \in X$ esiste un suo intorno aperto U in X tale che il diagramma :

$$U \subset r^{-1}(U) \xrightarrow{r} U$$

è diffeomorfo al diagramma:

$$\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^p$$

ove π è la proiezione $\pi(x, t) = x$.

Possiamo inoltre supporre che ω, letta su $\mathbb{R}^n$ tramite tale diffeomorfismo, abbia supporto nell'insieme $\{(x, t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} : ||t|| \leq 1\}$. Inoltre, per ogni $p-$forma chiusa α su $\mathbb{R}^n$ tale che $supp(\alpha) \cap supp(\omega)$ sia compatto, si avrà:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \wedge \omega = \int_{\mathbb{R}^p} \alpha$$

Ora l'integrale di ω su $\{x\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ è una costante c che non dipende da $x \in \mathbb{R}^p$. Ciò può essere dimostrato ad esempio così : sia $h : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^n$ definita da $t \mapsto (\rho(||t||)x, t)$ ove $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile e tale che $\rho \equiv 1$ a sinistra di 1 e $\rho \equiv 0$ a destra di 2 e chiamiamo H l'immagine di h. Essendo $\mathbb{R}^n$ contrattile, esiste una $(n-p-1)-$forma θ su $\mathbb{R}^n$ tale che $d\theta = \omega$. Ora ω ha lo stesso integrale su $\{x\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ e su H (perché essi coincidono ove $\omega \neq 0$); la formula di Stokes dice allora che tale integrale coincide con l'integrale di θ sulla sfera in $\{x\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ di centro zero e raggio 2 ed esso coincide con l'integrale di ω su $\{x\} \times \mathbb{R}^{n-p}$.

Si noti che per calcolare $\int_{\{x\}\times\mathbb{R}^{n-p}} \omega$ l'unico termine di ω che sopravvive è la "componente verticale" del tipo $a(x,t)dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{n-p}$.

Sia ora α la $p-$forma $\phi(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p$ ove ϕ è una funzione a supporto compatto su $\mathbb{R}^p$ tale che $\int_{\mathbb{R}^p} \alpha \neq 0$. Essa è chiusa su $\mathbb{R}^n$ ed è estendibile ad una $p-$forma chiusa sull'intorno tubolare T. Quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \wedge \omega = \int_{\mathbb{R}^p} \alpha$$

Si noti che anche nel prodotto $\alpha \wedge \omega$ "sopravvive" solo la componente verticale di ω ossia si ha:

$$\alpha \wedge \omega = \phi(x)a(x,t)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{n-p}$$

Integrando prima nelle variabili verticali e poi nelle altre si ottiene che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \wedge \omega = c \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \alpha$$

e quindi $c = 1$.

Per quanto riguarda la caratterizzazione descritta nella seconda parte dell'enunciato, basterà dimostrare che $H_c^{n-p}(T)$ è uno spazio vettoriale di dimensione uno; infatti in tal caso vi è al più un elemento avente integrale 1 sulle fibre di T (ed uno almeno vi deve essere perché la classe duale di X in T esiste).

Ed infatti T è chiaramente omotopa ad X (è diffeomorfa al fibrato normale di X in M) e quindi la restrizione di forme induce isomorfismi $H^i(T) \simeq H^i(X)$ per ogni i. Utilizzando le dualità di Poincaré su T e su X si ottengono isomorfismi $H_c^{n-i}(T) \simeq H_c^{p-i}(X) = H^{p-i}(X)$. In particolare per $i = p$ si ha che $H_c^{n-p}(T) \simeq H^0(X) = \mathbb{R}$ ha dimensione 1.

Corollario 75 *Siano M una varietà orientata di dimensione n ed X , Y sottovarietà rispettivamente compatta di dimensione p e chiusa di dimensione $n-p$. Se ω è una forma duale di X in M, allora $\int_Y \omega$ è un intero. Precisamente se X' è isotopa a X ed è trasversale ad Y, $\int_Y \omega$ conta la somma algebrica dei punti di intersezione (positivi e negativi) di X con Y. In particolare se anche Y è compatta e θ è una sua forma duale, allora $\int_M \omega \wedge \theta$ dà il numero dei punti (contato algebricamente confrontando localmente l'orientazione di M con quella data dall'orientazione di X seguita da quella di Y) in cui si incontrano X ed Y se "poste in posizione generica"*

Corollario 76 *Sia $f : M \to N$ una applicazione differenziabile propria tra varietà che sia trasversale ad una sottovarietà compatta $Y \subset N$. La classe duale di $X = f^{-1}(Y)$ in M è $f^*(\omega)$ ove ω è la classe duale di Y in N*

Dim. Per il precedente teorema basta osservare che si possono trovare intorni tubolari S di X in M e T di Y in N tali che $f(S) \subset T$ ed f dia un diffeomorfismo della fibra di S su X sulla fibra di T su Y.

Corollario 77 *Se due sottovarietà compatte orientate X , Y della varietà orientata M sono trasversali tra loro allora la classe duale di $X \cap Y$ è il prodotto in $H_c^*(M)$ tra le classi duali di X ed Y. In particolare, se $dim(X) + dim(Y) = dim(M)$ ed α , β sono loro forme duali , allora $\int_M \alpha \wedge \beta \in \mathbb{Z}$ dà il numero dei punti (contato algebricamente) in cui si incontrano X ed Y.*

Vediamo ora come la nozione di classe duale di una sottovarietá permetta in alcuni casi di individuare l'anello di coomologia.

Siano $M = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^n$ ed $X = \mathbb{P}^{n-1} \subset M$ un iperpiano. Essendo $M - X \simeq \mathbb{C}^n$, un facile ragionamento di tipo induttivo che utilizza la successione di Mayer-Vietoris della coppia ed il teorema di dualità dà gli spazi di coomologia. Precisamente: $H^i(\mathbb{P}^{n-1}) \simeq H^i(\mathbb{P}^n)$ per $i < 2n$ è isomorfo a $\mathbb{C}$ per i pari ed è nullo per i dispari. Per $0 \leq r \leq n$, sia ω_i la classe duale di un sottospazio proiettivo di dimensione r in $\mathbb{P}^n$ (perché tale classe non dipende dal particolare sottospazio scelto?). Dalla discussione precedente sulle classi duali si ottiene che $\int_{\mathbb{P}^n} \omega_r \wedge \omega_{n-r} = 1$. In particolare per $n = 2$ si ha che $\omega = \omega_1$ è tale che $\omega \wedge \omega = \omega_2$. Tale formula resta vera per ogni $\mathbb{P}^n$ (perché la restrizione dà un omomorfismo di anelli di $H^*(\mathbb{P}^n) \to H^*(\mathbb{P}^{n-1})$). Per induzione si dimostra analogamente che $\omega_r \wedge \omega_s = \omega_{r+s}$ e quindi che l'algebra $H^*(\mathbb{P}^n)$ è isomorfa all'algebra dei polinomi in ω ridotta modulo l'ideale (ω^{n+1}).

Sia $\mathbb{P}^n$ lo spazio proiettivo complesso di dimensione n che considereremo come varietà quasi complessa. Fissato $x_0 \in \mathbb{P}^n$, le rette (proiettive) passanti per x_0 costituiscono un $\mathbb{P}^{n-1}$ ed associando ad ogni $x \in \mathbb{P}^n - \{x_0\}$ la retta congiungente x con x_0 si ha una applicazione olomorfa $\pi : \mathbb{P}^n - \{x_0\} \to \mathbb{P}^{n-1}$. Se $X \subset \mathbb{P}^n$ è una sottovarietà quasi complessa chiusa di dimensione $2n - 2$, la restrizione di π dà una applicazione $X \to \mathbb{P}^{n-1}$ olomorfa e che quindi ha un grado strettamente positivo a meno che X sia vuota; tale grado, che chiaramente non dipende dalla scelta di x_0, sarà detto il *grado* di X. E' chiaro che se d è il grado di una tale X allora la classe duale di X in $\mathbb{P}^n$ è $d \cdot \omega$ ove ω è il generatore descritto sopra di $H^*(\mathbb{P})$, ossia la classe duale di un iperpiano.

In modo completamente analogo si definisce il grado di una sottovarietà quasi complessa chiusa di dimensione $2p$ in $\mathbb{P}^n$ (si sceglie un $\mathbb{P}^{n-p-1}$ disgiunto da X e si proietta su un $\mathbb{P}^p$); se d è il grado di una tale X allora $d > 0$ se X è non vuota e la sua classe duale è $d \cdot \omega^p$

Corollario 78 *Sia X_i , per $i = 1, \ldots, r$, una sottovarietà quasi complessa chiusa non vuota di codimensione $2p_i$ in $\mathbb{P}^n$. Se $p_1 + \ldots p_r \leq n$ allora $X_1 \cap \ldots \cap X_r \neq \emptyset$*

Dim. Per $i = 1, \ldots r$, se d_i è il grado di X_i in $\mathbb{P}^n$, allora $d_i \cdot \omega$ è la sua classe duale. Se l'intersezione delle X_i è vuota, tale rimarrà anche per delle $\tilde{X}_i$ vicine alle X_i. Possiamo quindi supporre che le X_i siano trasversali e ne segue che $d \cdot \omega^p = 0$ ove $d = d_1 \cdot \ldots \cdot d_r$ e $p = p_1 + \ldots + p_r$ il che non può essere perché $d \neq 0$ e $\omega^p \neq 0$ essendo $p < n + 1$.

Corollario 79 *Ogni sottovarietà quasi complessa chiusa di codimensione $2p$ in $\mathbb{P}^n$ è connessa se $2p \geq n$. Ad esempio ogni curva complessa liscia in $\mathbb{P}^2$ è irriducibile (in effetti come vedremo in seguito ciò vale anche per curve singolari)*

Dim. Due componenti connesse di X dovrebbero avere, per il precedente corollario, intersezione non vuota.

Corollario 80 *Ogni sistema di equazioni polinomiali omogenee sul corpo complesso ha soluzioni non banali se il numero delle variabili è superiore a quello delle equazioni.*

Dim. Anche qui utilizzando il lemma di Sard, si potrà supporre che ogni equazione definisca una ipersuperficie complessa liscia in $\mathbb{P}^n$ e quindi una sottovarietà quasi complessa di codimensione due; è ovvio inoltre che ognuna di esse è non vuota (ad esempio perché $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso).

Forme armoniche

In questo paragrafo X sarà una varietà differenziabile connessa, compatta senza bordo, orientata e dotata di una struttura metrica riemanniana (ossia ogni spazio tangente $T_x(X)$, e quindi anche il suo duale, è dotato di un prodotto scalare definito positivo $< \ , \ >$, che varia differenziabilmente con $x \in X$; qui, per sempilicità, si può supporre che X sia una sottovarietà di qualche $\mathbb{R}^N$ e che il prodotto scalare sia la restrizione di quello su $\mathbb{R}^N$. In effetti ciò può essere sempre supposto, per un teorema di immersione dovuto a Nash e molto più difficile di quello di Whitney che abbiamo riportato noi).
Si ricordi che su una spazio vettoriale orientato $T_x(X)^* = V$ di dimensione n e dotato di un prodotto scalare definito positivo (brevemente: uno spazio euclideo) è definita una isometria $* : \wedge^p V \to \wedge^{n-p} V$ tale che $*^2 = (-1)^{p(n-p)}$. Utilizzando coordinate locali si verifica che se una p-forma su X è differenziabile lo è anche $*\omega$. In definitiva si ottengono omomorfismi $* : A^p(X) \to A^{n-p}(X)$.
Definiamo un prodotto scalare su $A^p(X)$ nel modo seguente:
per $\alpha, \beta \in A^p(X)$ si pone $(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \wedge *\beta$.

Per la definizione di $*$ si ha che $\alpha \wedge *\beta$ coincide con $< \alpha, \beta > \cdot *1$. Essendo $*$ una isometria di $\wedge^p T_x(X^*)$ con $\wedge^{n-p} T_x(X)^*$, ne segue che anche $* : A^p(X) \to A^{n-p}(X)$ lo è. Ponendo $A(X) = \bigoplus_{p=o}^n A^p(X)$ e considerando questa una decomposizione ortogonale, ne segue che $*$ è un operatore ortogonale di $A(X)$ in se e quindi che $*^{-1}$ è l'aggiunto di $*$.

L'aggiunto di d su $A(X)$ è l'operatore $\delta = (-1)^p *^{-1} d*$ che può essere scritto anche $(-1)^{np+n+1} * d*$. Si ha $\delta \circ \delta = 0$. Inoltre $d + \delta$ è autoaggiunto. Se n è pari si avrà $\delta = - * d*$ e $d = *\delta*$.

L'operatore di Laplace-Beltrami è definito da : $\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d$.
Si ha che Δ commuta con d , δ e con $*$. Una p-forma ω è detta *armonica* se $\Delta\omega = 0$. Si noti che

$$(\Delta\omega, \omega) = (d\delta\omega + \delta d\omega, \omega) = (\delta\omega, \delta\omega) + (d\omega, d\omega)$$

Ne segue il seguente:

Teorema 81 *Una p-forma ω è armonica se e solo se $d\omega = 0$ e $\delta\omega = 0$*

Indichiamo con $\mathbb{H}^p(X)$ lo spazio vettoriale delle p-forme armoniche su X;
i suoi elementi sono p-forme chiuse su X e quindi si ha un omomorfismo $j : \mathbb{H}^p(X) \to H^p_{DR}(X)$. Si verifica facilmente che tale j è iniettiva: infatti se $\omega \in \mathbb{H}^p(X)$ ha una primitiva α su X, essendo $d\alpha$ armonica si ha $\delta d\alpha = 0$ e quindi $0 = (\alpha, \delta d\alpha) = (d\alpha, d\alpha)$ ossia $d\alpha = 0$. Assai più complicato è il seguente:

Teorema 82 $j : \mathbb{H}^p(X) \to H^p_{DR}(X)$ *è un isomorfismo per ogni $p \in \mathbb{N}$*

La funzione esponenziale

La serie $\sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ e definisce quindi una funzione $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$; lo studio elementare di tale funzione è svolto nelle prime pagine di "Real and Complex Analysis" di W.Rudin. In particolare si trova che exp è un omomorfismo (differenziabile) surgettivo del gruppo additivo dei numeri complessi nel gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli. Il nucleo di exp è un sottogruppo ciclico infinito il cui generatore avente parte immaginaria positiva è indicato con la notazione $2\pi i$.

Introduzione di exp tramite inversione di un integrale

Consideriamo la $1-$forma olomorfa $\omega = dz/z$ su $\mathbb{C}^*$. Detto $\phi : (X, x_0) \to (\mathbb{C}^*, 1)$ il rivestimento universale, siano $\tilde{\omega} = \phi^*(\omega)$ e $f : X \to \mathbb{C}$ la primitiva di $\tilde{\omega}$ con $f(x_0) = 0$. Tale f è un rivestimento e quindi un biolomorfismo. Infatti f è un omeomorfismo locale perché il suo differenziale è in ogni punto non nullo. Se $h : \Omega \to \mathbb{C}$ è una primitiva di ω su un aperto di $\mathbb{C}^*$ e $\lambda \in \mathbb{C}^*$, allora $\bar{h}(z) = h(\lambda z)$ è una primitiva di ω su $\bar{\Omega} = (1/\lambda) \cdot \Omega$; da ciò si deduce nel modo solito che per f vale il sollevamento dei cammini e quindi è effetivamente un rivestimento. Quindi il rivestimento universale di $\mathbb{C}^*$ può essere identificato con $\mathbb{C}$ e descritto come l'inversione dell'integrale $\int dz/z$.

Ne risulta che $\mathbb{C}^*$ è descrivibile come quoziente di $\mathbb{C}$ modulo il sottogruppo Γ dei periodi di ω; questo deve essere un sottogruppo discreto e non può essere il gruppo nullo perché $\mathbb{C}^*$ non è omeomorfo a $\mathbb{C}$ (non è semplicemente connesso) e non può avere rango due perché $\mathbb{C}^*$ non è compatto. Quindi Γ ha rango uno. Verifichiamo che Γ è fatta di numeri puramente immaginari. Infatti:

$$\omega = dz/z = (\bar{z} \cdot dz)/(\bar{z} \cdot z) = \alpha + i\beta$$

ove $\alpha = (xdx + ydy)/(x^2 + y^2)$ e $\beta = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ sono $1-$forme chiuse reali su $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Se $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una primitiva di ω su $\mathbb{R}^+$ (essa esiste perché $\mathbb{R}^+$ è semplicemente connesso), allora $(1/2)F(x^2 + y^2)$ è una primitiva di α che quindi è esatta. Ne segue che i periodi di ω sono i periodi di β moltiplicati per l'unità immaginaria. Risulta così univocamente determinato un generatore T di Γ a parte immaginaria positiva e si può introdurre la costante reale positiva π ponendo $T = 2\pi i$.

Evidentemente questo modo di introdurre la funzione esponenziale è concettualmente molto più complicato dell'altro. Inoltre lo schema sin qui descritto introduce una struttura di gruppo su $\mathbb{C}^*$ (come quoziente di $\mathbb{C}$) ma non precisa che questa coincide proprio con quella già esistente (la moltiplicazione tra numeri complessi non nulli). Questo metodo ha comunque alcuni pregi. Anzitutto non utilizza alcun tipo di calcolo; inoltre assicura che su $\mathbb{C}^*$ c'è una struttura di gruppo, quella di quoziente di $\mathbb{C}$ modulo il sottogruppo dei periodi della forma ω, indipendentemente dal fatto che già una tale struttura (il prodotto tra numeri complessi) fosse presente.

Risultati analoghi si possono ottenere con gli stessi metodi in situazioni più complicate come quella che descriveremo ora.

Inversione di integrali

Sia $F(x, y)$ un polinomio in due variabili che per ora supporremo a coefficienti reali e sia $P = (x_0, y_0)$ tale che $F(x_0, y_0) = 0$ e $D_y F(x_0, y_0) \neq 0$. Quindi il luogo

Δ degli zeri di F è localmente in (x_0, y_0) il grafico di una funzione (analitica) $y = h(x)$. Consideriamo integrali del tipo:

$$\int_a^b \frac{R(x,h(x))}{S(x,h(x))}$$

ove R e S sono polinomi in due variabili con $S(x, h(x))$ non identicamente nullo. Come insieme di definizione di h si può prendere quello massimo ove è prolungabile la funzione (implicitamente definita) h passante per (x_0, y_0) (problematica dello studio del *campo di definizione*); se il punto (x_0, y_0) non viene indicato si ha l'indeterninazione di quale funzione si voglia integrare e su quali possibili intervalli. Ad esempio se $F(x, y) = y^2 - x$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$ si otterrà la funzione $h(x) = \sqrt{x}$ definita su $\mathbb{R}^+$ e si potrà integrare su qualsiasi intervallo della semiretta positiva. Si noti che fissando invece il punto $(1, -1)$ avremmo ottenuto $h(x) = -\sqrt{x}$. Nel caso di una F più complicata si avranno maggiori difficoltà nella descrizione delle possibili funzioni ottenibili per esplicitazione; inoltre non è chiaro se e come tali varie funzioni e relative primitive siano correlate tra loro.

Si può rimediare in parte a ciò considerando la "curva" X definita nel piano come luogo di zeri di F e la forma differenziale

$$\omega = \frac{R(x,y)}{S(x,y)}dx$$

o meglio la sua restrizione alla curva X (si suppone ovviamente che S non sia identicamente nulla su alcuna componente di X).

Risulterà proficuo estendere tutto ciò al caso complesso; ciò tra l'altro permetterà (nel caso che F sia irriducibile) di "connettere" i vari fogli in cui si spezzava il caso reale (si consideri ad esempio il caso $F(x, y) = y^2 - x(x^2 - 1)$ in cui la curva X si decompone in due rami apparentemente totalmente slegati tra loro; eppure i "calcoli" fatti per integrare su essi saranno sostanzialmente gli stessi).

Si ha infatti il seguente teorema di connessione:

Teorema 83 *Se $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ è irriducibile, allora $X = \{(x, y) \in \mathbb{C} : F(x, y) = 0$ $(D_xF(x, y), D_y(x, y)) \neq (0, 0)$ è connesso ed è quindi una superficie di Riemann*

Tale X non sarà compatta. Risulterà utile aggiungere un insieme finito di punti in modo da ottenere una superficie di Riemann compatta come precisato dal prossimo teorema: diremo che una superficie di Riemann X è *compattificabile* se è biolomorfa ad un aperto di una superficie di Riemann compatta $\tilde{X}$; diremo che è finitamente compattificabile se ciò è possibile con $\tilde{X} - X$ finito.

Teorema 84 *Se la superficie di Riemann è finitamente compattificabile, ogni due sue compattificazioni sono biolomorfe per un biolomorfismo che induce l'identità su X). La superficie di Riemann determinata (come nel precedente teorema) da un polinomio irriducibile è finitamente compattificabile*

Si potrebbe dimostrare che con questa procedura (compattificazione di superficie associate a polinomi di due variabili) si ottengono tutte le superficie di Riemann compatte, ma ciò richiederebbe l'utilizzo di techiche di Analisi abbastanza approfondite. Ci accontenteremo di dimostrare un risultato più debole ottenibile però con metodi geometrici di tipo elementare.

Prolungamento di funzioni olomorfe

Introduciamo una topologia nello spazio prodotto $\mathcal{O} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}\{\{T\}\}$ (i cui elementi sono detti *elementi di funzione analitica* secondo Weierstrass) fissando come base di aperti gli insiemi del tipo seguente:

dati $(z_0, S(T)) \in \mathcal{O}$ ed $\epsilon > 0$ sia B l'insieme degli $(z_1, S_1) \in \mathcal{O}$ tali che $|z_1 - z_0| < \epsilon$ e del raggio di convergenza di $S(T)$ e S_1 è lo sviluppo della somma di S nel punto z_1. La proiezione sul primo fattore di $\mathcal{O}$ su $\mathbb{C}$ è un omeomorfismo locale che introduce su $\mathcal{O}$ una struttura di varietà complessa di dimensione uno. la componente connessa di un elemento di funzione $(z_0, S(T))$ di $\mathcal{O}$ è così una superficie di Riemann che viene detta ottenuta per prolungamento dell'elemento di funzione dato.

Teorema 85 *Un elemento di funzione analitica $(z_0, S(T))$ induce per prolungamento analitico una superficie di Riemann finitamente compattificabile se e solo se esiste un polinomio irriducibile $F(x, y)$ tale che $F(T, S(T)) \equiv 0$ in $\mathbb{C}\{\{T\}\}$(o equivalentemente in $\mathbb{C}[[T]]$ oppure $F(z, S(z)) = 0$ per ogni z sufficientemente piccolo)*

Questo risultato segue facilmente dal seguente:

Teorema 86 *Il corpo delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann compatta, è un corpo di funzioni algebriche in una variabile (ossia è una estenzione finitamente generata di trascendenza uno su $\mathbb{C}$)*

Funzioni analitiche generalizzate

Il prolungamento sopra definito di un elemento di funzione analitica fornisce una superficie di Riemann X (una componente connessa di $\mathcal{O}$), una funzione $z : X \to \mathbb{C}$ (la proiezione sul primo fattore di $\mathcal{O}$) che è priva di punti critici e una funzione olomorfa $f : X \to \mathbb{C}$ (quella i cui sviluppi in serie costituiscono la seconda componente in $\mathcal{O}$). Generalizziamo ulteriormente questa nozione considerando le terne (X, z, f) ove X è una superficie di Riemann, $z : X \to P$ è una applicazione olomorfa non costante su una superficie di Riemann P e $f : X \to \mathbb{P}^1$ è una funzione meromorfa. Tale oggetto sarà detta una *funzione analitica polidroma*; chiameremo P il dominio della funzione e $\mathbb{P}^1$ sarà il codominio ed abbrevieremo l'indicazione della funzione con la sola lettera f.

Alcuni esempi Esaminiamo ora un caso particolare di integrale del tipo sopra introdotto. Sia $f \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado n avente radici distinte, ossia tale che per $x \in \mathbb{C}$ se $f(x) = 0$ si ha $f'(x) \neq 0$ e studiamo l'integrale della forma $\omega = dx/\sqrt{f(x)}$.

Si verifica intanto che il luogo di zeri X di $F(x, y) = y^2 - f(x)$ in $\mathbb{C}^2$ è una varietà complessa di dimensione uno (perché in ogni punto di X almeno una delle derivate parziali di F è diversa da zero). Le coordinate x , y su $\mathbb{C}^2$ danno per restrizione due funzioni olomorfe su X verificanti la relazione $y^2 - f(x) = 0$.

Si ha quindi la relazione $2u \cdot dy = f'(x) \cdot dx$ (relazione tra $1-$forme su X) che può essere scritta $dx/y = 2dy/f'(x)$ il cui primo membro è la $1-$ forma ω che vogliamo studiare; il fatto che essa si possa scrivere anche come nel secondo membro, assicura che ω è olomorfa mai nulla su tutto X (ossia all'intorno di ogni punto di X, scelta una coordinata locale t si ha $\omega = h(t)dt$ con h olomorfa e $h(0) \neq 0$)

Compattificazione di X. Fuori di un disco D che contenga tutte le radici di f, si ha una applicazione olomorfa localmente invertibile di grado due di

$X-\phi^{-1}(D)$ in $\mathbb{C}-D$ (ϕ è la restrizione ad X della proiezione sull'asse x). Allora o $X-\phi^{-1}(D)$ è unione di due componenti connesse e ϕ induce un biolomorfismo tra ognuna di esse e $\mathbb{C}-D$ oppure $\mathbb{C}-D$ è connesso e allora $X-\phi^{-1}(D) \to \mathbb{C}-D$ è un rivestimento di grado due; in questo caso essendo $\mathbb{C}-D$ biolomorfo a $U = \{0 < |z| < 1\}$, tale rivestimento è isomorfo a $z \mapsto z^2$ di U in U, perché U possiede un solo rivestimento di grado due. Saremo nel primo caso se n è pari ed allora X sarà compattificabile con 2 punti; altrimenti n è dispari e si compattifica con un solo punto.

Caso $n = 3$ Allora x , $y : \tilde{X} \to \mathbb{P}^1$ sono olomorfe di gradi rispettivamente due e tre. Quindi nel punto p_0 aggiunto ad X per compattificarla, x , y hanno poli di ordine due e tre. Ossia se t è una coordinata locale olomorfa di centro p_0, si avrà $x(t) = t^{-2} \cdot a(t)$, $y(t) = t^{-3} \cdot b(t)$ con a , b olomorfe (per t piccolo) e non nulle in zero. Con facile calcolo si verifica quindi che $\omega = dx/y$ è olomorfa non nulla anche nel punto p_0.

A questo punto ragionando come in un teorema precedente in cui si avevano $1-$forme $\omega_1, \dots, \omega_n$ su una varietà differenziabile che inducevano in ogni punto una base del duale dello spazio tangente (si integra la rimontata di ω sul rivestimento universale, si scopre che questo è $\mathbb{C}$ ...) si trova che il sottogruppo Γ di $\mathbb{C}$ formato dagli $\{\int_\gamma \omega$ per $\gamma \in \pi_1(\tilde{X})\}$, è discreto di rango due ed esiste un biolomorfismo $f : \tilde{X} \to \mathbb{C}/\Gamma$ tale che $\omega = F^*(dt)$.

La dipendenza algebrica di funzioni meromorfe su una superficie di Riemann compatta ha una dimostrazione che utilizza le stesse tecniche del teorema di connessione. Descriveremo ora le linee essenziali di tali dimostrazioni.

Sia $f : X \to \mathbb{P}^1$ una funzione meromorfa non costante su una superficie di Riemann compatta X. Essa sarà una applicazione di un certo grado n; precisamente esisterà Δ finito in $\mathbb{P}^1$ tale che $f : X - f^{-1}(\Delta) \to \mathbb{P}^1 - \Delta$ sia un rivestimento di grado n.

Mostreremo che ogni altra funzione meromorfa $g : X \to \mathbb{P}^1$ è radice di un polinomio di grado n a coefficienti in $\mathbb{C}(f)$.

Infatti supponiamo che g sia finita in tutti i punti che non si proiettano in Δ (altrimenti si ingrandisca un pò Δ); fissiamo per ogni $x \in \mathbb{P}^1 - \Delta$ una numerazione $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ dei punti di $f^{-1}(x)$ (non richiediamo per le α_i alcuna condizione di regolarità). L'espressione :

$$(W - g(\alpha_1(x)) \cdot \ldots \cdot (W - g(\alpha_n(x)) = G(W, x)$$

è un polinomio monico di grado n in W a coefficienti funzioni (a priori discontinue) di x. Dimostreremo ora che i coefficienti di G sono funzioni meromorfe su $\mathbb{P}^1$, quindi rapporti tra polinomi in x e ciò concluderà la dimostrazione

Anzitutto tali coefficienti sono olomorfi fuori di Δ; infatti siccome essi non dipendono da come sono state scelte le α_i, attorno ad ogni punto di $\mathbb{P}^1 - \Delta$ possiamo supporre che le α_i siano inverse locali olomorfe di f.

Si controlla poi che tali coefficienti hanno nei punti di Δ singolarità eliminabili o polari: infatti essi avranno limite zero se moltiplicati per una opportuna potenza di una coordinata locale.

Funzioni olomorfe di più variabili

Notazioni. Le variabili in $\mathbb{C}^n$ saranno di solito indicate $z_1, \dots, z_n$ ove, esplicitando le parti reali ed immaginarie, scriveremo $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ per

$1 \leq \alpha \leq n$; l'identificazione di $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ che utilizzeremo sarà quella indotta da $(z_1, \ldots, z_n) \to (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$. In termini intrinseci, se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione finita, ad ogni base $e_1, \ldots, e_n$ di V su $\mathbb{C}$ associeremo la base di V su $\mathbb{R}$ data da $(e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n)$.

Siano $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$ una applicazione; essa può quindi essere considerata come una applicazione di un aperto di $\mathbb{R}^{2n}$ in $\mathbb{R}^{2m}$ e nel caso sia differenziabile in un punto $p \in \Omega$, il suo differenziale $df(p)$ sarà una applicazione $\mathbb{R}$-lineare di $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^m$. Diremo che f è *olomorfa* se :

- f è differenziabile (infinite volte) in senso reale

- per ogni $p \in \Omega$, $df(p) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ è $\mathbb{C}$-lineare.

Esempi di applicazioni olomorfe:

1. Una applicazione polinomiale P di $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^m$; infatti detta $J(z)$ la matrice a m righe ed n colonne costituita dalle derivate formali delle componenti polinomiali di P , per $z, h \in \mathbb{C}^n$ un semplice calcolo dà l'eguaglianza:

$$P(z+h) = P(z) + J(z)h + R(z,h)$$

ove R è una matrice di polinomi nelle z, h. Da ciò si deduce che tale applicazione è differenziabile nel punto z e che il suo differenziale è $dP(z)[h] = J(z)h$; ne segue anche che P è differenziabile infinite volte; infatti l'applicazione $dP : \Omega \to Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ è fattorizzata da $z \to J(z)$ di $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^{nm} = Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ che per ipotesi di induzione (ad esempio sul grado delle componenti) possiamo supporre differenziabile infinite volte, seguita dall'inclusione in $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ che è lineare e quindi anch'essa differenziabile infinite volte.

2. Una applicazione $\mathbb{C}^n \supset \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{C}^m$ è olomorfa se e solo se le sue componenti lo sono; inoltre la composizione di applicazioni olomorfe è olomorfa. Osservando quindi che somma e prodotto sono applicazioni polinomiali di $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, si ottiene che per Ω aperto in $\mathbb{C}^n$, l'insieme $\mathcal{O}(\Omega)$ delle funzioni olomorfe su Ω a valori in $\mathbb{C}$ è chiuso rispetto a somma e prodotto e costituisce così un annello (un algebra su C perché contiene le costanti). Dimostrando (facilmente come in 1.) che $z \to 1/z$ definisce una funzione olomorfa su $\mathbb{C} - \{0\}$, si deduce anche che se $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ e g è priva di zeri in Ω, allora f/g è olomorfa su Ω.

3. Il teorema di inversione locale. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ olomorfa ove Ω è un aperto in $\mathbb{C}^n$ contenente 0; se $df(0)$ è un isomorfismo di $\mathbb{C}^n$ in se, allora f è localmente invertibile come applicazione olomorfa. Infatti, per l'ordinario teorema di inversione locale, f sarà localmente invertibile come applicazione reale; si tratta quindi solo di controllare che l'inversa locale ha il differenziale $\mathbb{C}$-lineare e ciò segue dal fatto che esso è l'inverso di $df(0)$. Una applicazione biunivoca e olomorfa assieme alla sua inversa sarà chiamata un *biolomorfismo* o anche *cambiamento di coordinate olomorfo*; si deducono immediatamente gli analoghi olomorfi dei teoremi delle funzioni implicite reali: se $\mathbb{C}^n \supset \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{C}^m$ è olomorfa, $0 \in \mathbb{C}$ e $f(0) = 0$ allora se $df(0)$ ha rango m, modulo un cambiamento di coordinate in un intorno di 0 in $\mathbb{C}^n$, la f è la proiezione di $\mathbb{C}^n$ sullo spazio delle prime m coordinate. Se invece ha rango n, cambiando coordinate in $0 \in \mathbb{C}^m$ la f diviene l'inclusione di $\mathbb{C}^n$ nello spazio delle prime n coordinate in $\mathbb{C}^m$.

4. Siano Ω un aperto in $\mathbb{C}^n$ e $K : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ continua e tale che per ogni $t_0 \in [a,b]$ la funzione $\Omega \ni z \to K(t_0, z) \in \mathbb{C}$ sia olomorfa. Allora la funzione g da Ω in $\mathbb{C}$ definita dalla formula $g(z) = \int_a^b K(t,z)dt$ è olomorfa.

In effetti ciò segue immediatamente dalla formula di differenzazione degli integrali contenenti un parametro.

Sommazione di serie

Sia $f : X \to \mathbb{C}$ una funzione. Per $\Delta \subset X$ finito, $\sum_\Delta f$ è definito come la somma degli $f(x)$ per $x \in \Delta$. Diremo che f è *sommabile* su X se esiste $L \in \mathbb{C}$ tale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\Delta_0 \subset X$ finito tale che per ogni sottoinsieme finito $\Delta_0 \subset \Delta \subset X$ si abbia $|\sum_\Delta f - L| < \epsilon$. Tale L, che ovviamente è univocamente determinato nel caso che esista, verrà detto *somma* di f su X e scriveremo $\sum_X f = L$.

Esercizio $f : X \to \mathbb{C}$ è sommabile su X se e solo se $|f|$ lo è. (Questo enunciato è più facilmente dimostrabile per funzioni a valori reali. Rimane comunque valido per funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ ma è falso se i valori sono presi in uno spazio di Hilbert).

Teorema 87 *Siano $f : X \to \mathbb{C}$ sommabile e $(X_i)_{i\in I}$ una partizione di X. Allora per ogni $i \in I$ la funzione $f|_{X_i}$ è sommabile su X_i e detta L_i la sua somma la funzione $i \to L_i$ è sommabile su I e si ha $\sum_X f = \sum_I L_i$.*

La dimostrazione, del tutto ovvia, è lasciata per esercizio.
In modo analogo a quello seguito nel caso delle successioni reali si dimostra che una $f : X \to \mathbb{C}$ è sommabile se e solo se è di Cauchy nel senso seguente: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\Delta_0 \subset X$ finito tale che per ogni sottoinsieme finito Δ di X con $\Delta \cap \Delta_0 = \emptyset$ si ha $|\sum_\Delta f| < \epsilon$. Nel caso di serie di funzioni, ossia se si ha una applicazione $f : X \times T \to \mathbb{C}$ ove $t \in T$ è considerato come parametro, si introduce in modo evidente la nozione di sommabilità uniforme. Un caso speciale in cui ciò avviene è il caso in cui esiste una funzione sommabile $g : I \to [0, +\infty[$ che *maggiora* la f nel senso che $|f(x,t)| \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e $t \in T$; diremo in tal caso che f (o la serie $\sum_{i\in I} f(i)$) è *totalmente sommabile.*

Il caso delle serie di potenze rientra in questo schema: si prende $X = \mathbb{N}^n$ e, utilizzando notazioni multiindice, si fissa una costante $a_I \in \mathbb{C}$ per ogni $I \in \mathbb{N}^n$; per ogni $z \in \mathbb{C}^n$ si ha una funzione $\mathbb{N}^n \ni I \to a_I z^I \in \mathbb{C}$: l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ per i quali essa è sommabile sarà detto l'*insieme di convergenza* della serie $\sum_{I\in\mathbb{N}^n} a_I Z^I$ e la parte interna di questo il *dominio di convergenza* della serie.

Indicheremo con $\mathbb{C}[[Z_1, \ldots, Z_n]]$ l'anello delle serie formali $\sum_{I\in\mathbb{N}^n} a_n Z^I$ e con $\mathbb{C}\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ il sottoanello costituito dalle serie con dominio di convergenza non vuoto.

Per $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$ ed $r = (r_1, \ldots, r_n) \in]0, +\infty[^n$ il *policilindro* di centro $\underline{z}$ e raggio r sarà l'insieme $P(\underline{z}; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i - \underline{z}_i| < r_i \text{ per } i = 1, \ldots, n\}$. La sua chiusura sarà chiamata *policilindro chiuso.*

Lemma 88 *Se la serie di potenze $\sum a_I Z^I$ è sommabile per $z = (z_1, \ldots, z_n)$, allora essa è totalmente sommabile sul policilindro $P(0, r)$ ove $r = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$. In particolare (vedi gli usuali teoremi di analisi) la sua somma è una funzione continua su tale policilindro.*

Corollario 89 *Il dominio di convergenza di una serie di potenze su $\mathbb{C}^n$ è una unione di policilindri.*

Nota. Nel caso $n = 1$ il dominio di convergenza è un disco (eventualmente di reaggio nullo o infinito) perché in tal caso i policilindri (=dischi) sono totalmente ordinati dall'inclusione. Per $n \geq 2$ ciò non è più vero. Comunque il dominio di convergenza non può essere una arbitraria unione di policilindri. Si può infatti dimostrare con semplici maggiorazioni che se per ogni z del dominio di convergenza di una serie che sia a componenti tutte non nulle, si considera la n-upla di numeri reali costituita coi logaritmi dei moduli delle sue componenti, si ottiene un insieme (aperto) convesso in $\mathbb{R}^n$. In particolare ad esempio se una serie in due variabili converge sui policilindri di raggi $(1,2)$ e $(2,1)$ allora essa converge anche in un intorno del punto $(1,1)$

Funzioni analitiche

Useremo notazioni multiindice.

Siano $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione. Diremo che f è analitica se essa è *sviluppabile in serie di potenze* all'intorno di ogni punto di Ω. Intendiamo con ciò che per ogni $\underline{z} \in \Omega$ esistono $r = (r_1, \ldots, r_n) \in]0, +\infty[^n$ ed una serie di potenze $\sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I Z^I$ tali che il policilindro $P(\underline{z}; r)$ sia contenuto in Ω e per $z \in P(\underline{z}, r)$ la serie $\sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_n (z - \underline{z})^n$ sia sommabile ed abbia somma $f(z)$.

Teorema 90 *Sia $\sum a_I Z^I$ una serie convergente sul policilindro P; allora la sua somma su P è una funzione analitica f su P.*

Dim. Si deve mostrare che f è sviluppabile in serie di potenze in ogni punto z di P. Dimostreremo non solo che tale sviluppo esiste ma anche che esso converge almeno sul più grande policilindro di centro z che è contenuto in P.

Sia $R = (R_1, \ldots, R_n)$ il raggio di P e consideriamo il policilindro Q di centro z e raggio $r = (r_1, \ldots, r_n)$ ove $R_i = |z_i| + r_i$ per $i = 1, \ldots, n$. Per $h = (h_1, \ldots, h_n) \in P(0, r)$ Consideriamo la serie $\sum a_I (z + h)^I$; da essa, svolgendo le potenze binomiali, si trova una serie di potenze nelle $2n$ variabili $z_1, \ldots, z_n, h_1, \ldots, h_n$. Se quest'ultima è sommabile, allora la somma può essere calcolata sommando prima per ogni potenza di h tutti i termini in cui essa compare e successivamente la serie di potenze nelle h che ne risulta e avremo così ottenuto il risultato voluto. Che effettivamente tale serie sia convergente si dimostra mostrando che essa è assolutamente convergente nel modo che segue: la serie di partenza sarà sommabile anche nel punto $(|z_1| + |h_1|, \ldots, |z_n| + |h_n|)$. Quindi essa è assolutamente sommabile; ora se nella serie $\sum |a_I|(|z| + |h|)^I$ si svolgono le potenze, si ottiene una serie a termini non negativi, la cui sommabilità equivale all'essere le somme parziali limitate e ciò è evidentemente vero perché $\sum |a_I|(|z| + |h|)^I$ è sommabile.

Esercizi 1. Una serie di potenze $\sum a_I z^I$ ha dominio di convergenza non vuoto (si dice allora che è una serie di potenze *convergente*) se e solo se esistono costanti positive r e M tali che $|a_I| \le M r^{-|I|}$ per ogni $I \in \mathbb{N}^n$.

2. Ogni funzione analitica è olomorfa.

La formula di Cauchy

Essa si deduce dalla conoscenza di quella in una variabile nel seguente modo. Sia $P = P(z_0, r)$ un policilindro di centro $z_0 \in \mathbb{C}^n$ ove $r = (r_1, \ldots, r_n)$ con $r_i \in]0, \infty[$ per $i = 1, \ldots, n$. Chiameremo *frontiera fine* di P la varietà differenziabile $\dot{P} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i| = r_i, i = 1 \ldots, n\}$, dotata della orientazione prodotto delle orientazioni naturali delle 1-sfere di cui è prodotto.

Supponiamo che f sia olomorfa su un aperto Ω contenente la chiusura del policilindro P.

Teorema 91 *Per $w \in P$ si ha*

$$f(w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\dot{P}} \frac{f(z)}{(z_1 - w_1) \cdots (z_n - w_n)} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

Dim. Si applica n volte la formula di Cauchy in una variabile.

Corollario 92 *Sia f olomorfa su un policilindro P. Allora essa è su P la somma di una serie di potenze il cui dominio di convergenza contiene P.*

Dim. Analoga a quella per una variabile.

Un teorema di Hartogs

In una variabile si è visto che se f è olomorfa, allora la 1-forma $f(z)dz$ è chiusa. In n variabili si ha che se f è olomorfa, diciamo su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, allora la n-forma $f(z)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ è chiusa su Ω.

Supponiamo di avere una f olomorfa su un aperto Ω contenente l'insieme H costituito dagli $z \in \mathbb{C}^n$ per cui o $|z_1| \leq a_1$ e $z_i = 0$ per $i = 2, \ldots, n$ oppure $|z_1| = a_1$ e $z_i \leq a_i$ per $i = 2, \ldots, n$ ove $a = (a_1, \ldots, a_n) \in {\mathbb{N}^*}^n$. Allora detto P il policilindro di raggi a, la formula

$$F(w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\dot{P}} \frac{f(z)}{(z_1 - w_1) \cdots (z_n - w_n)} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

definisce una funzione olomorfa su P che estende la f: infatti per w vicino ad H, si può integrare sulla frontiera fine di un policilindro di raggio $(a_1, \epsilon, \ldots, \epsilon)$ con ϵ sufficientemente piccolo, perchè questo è bordante a $\dot{P}$ (si usa la formula di Stokes) e questo dà la f all'interno di tale policilindro.

Corollario 93 *Sia $n \leq 2$. Ogni funzione olomorfa su un aperto connesso di $\mathbb{C}^n$ avente complementare compatto è estendibile ad una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}^n$.*

Appendice 1: Equazioni differenziali ordinarie

Flussi

Siano X un insieme ed U un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times X$. Per $x \in X$ indichiamo con J_x l'insieme dei $t \in \mathbb{R}$ tali che $(t, x) \in U$; in tal modo $U = \bigcup_{x \in X} J_x \times \{x\}$. Analogamente per $t \in \mathbb{R}$ indichiamo con U_t l'insieme degli $x \in X$ tali che $(t, x) \in U$; in tal modo $U = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times U_t$.

Diremo che U è *stellato* se ogni J_x è convesso in $\mathbb{R}$ (ossia è un intervallo, eventualmente vuoto).

Sia X uno spazio topologico. Un *flusso locale* su X è il dato di un aperto stellato U e di una applicazione continua $\Phi : U \to X$ tale che se $(0, x) \in U$ si abbia $\Phi(0, x) = x$ e se (t, x) , $(s + t, x)$ e $(s, \Phi(t, x))$ sono in U si abbia $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$.

Due flussi locali Φ , Φ' definiti su aperti stellati U e U' sono detti compatibili se coincidono su un aperto stellato V contenente $U_0 \cap U'_0$ e contenuto in $U \cap U'$.

Un flusso locale $\Phi : U \to X$ tale che $U_0 = X$ e che sia massimale nel senso che non esistono flussi locali $\Phi' : U' \to X$ a lui equivalenti e con U' contenente strettamente U, sarà detto un *flusso* od anche un *sistema dinamico* su X. Un tale flusso sarà detto *completo* se si ha $J_x = \mathbb{R}$ per ogni $x \in X$, ossia se Φ è definito su tutto $\mathbb{R} \times X$.

Quanto detto sopra può essere alternativamente espresso come segue. Per $t \in \mathbb{R}$ sia $\phi_t : U_t \to X$ definita da $\phi_t(x) = \Phi(t, x)$. Le proprietà caratterizzanti un flusso locale possono essere espresse allora dicendo che ϕ_0 è l'identità su U_0 e che per $s, t \in \mathbb{R}$ ed $x \in X$ si ha $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x)$ quando tutti i termini in tale formula sono definiti.

Lemma 94 *Sia $\Phi : U \to X$ un flusso locale definito su un aperto stellato U di $\mathbb{R} \times X$. Per ogni $x_0 \in U_0$ esistono un $\epsilon_0 > 0$ ed un intorno aperto V di x_0 in U_0 tali che $[-\epsilon, \epsilon] \times V \subset U$ e per $|h| \leq \epsilon_0$, l'applicazione ϕ_h induce un omeomorfismo tra V ed un aperto $\phi_h(V) \subset U_0$*

Dim. Siano W un intorno aperto di x_0 in U_0 ed $\epsilon > 0$ tali che $[-\epsilon, \epsilon] \times W$ sia contenuto in U. Essendo Φ continua nel punto $(0, x_0)$, esistono $0 < \epsilon_0 \leq \epsilon$ ed un intorno aperto V di x_0 in W tali che per $|h| \leq \epsilon_0$, l'immagine di V tramite ϕ_h sia contenuta in W. Per tale h, l'applicazione ϕ_{-h} è quindi definita su V_h ed è l'inversa di ϕ_h. Resta da verificare che V_h è un aperto. Sia $x \in V$; per la continuità di ϕ_{-h} nel punto $\phi_h(x)$, esiste un intorno A di $\phi_h(x)$ in W che viene applicato da ϕ_{-h} entro V. Per ogni $y \in A$ si ha allora $y = \phi_h(\phi_{-h}(y)$ con $\phi_{-h}(y) \in V$; quindi A è tutto contenuto in V_h.

Sia $\Phi^{(i)} : U^{(i)} \to X$ per $i \in I$ un sistema di flussi locali su X che siano a due a due compatibili e tali che X sia unione degli $U_0^{(i)}$. Un tale sistema sarà detto *costante* in $x \in X$ se per ogni $i \in I$ con $x \in U_0^{(i)}$ ed ogni $t \in \mathbb{R}$ con $(t, x) \in U^{(i)}$ si ha $\Phi^{(i)}(t, x) = x$. Tale sistema sarà detto a *supporto compatto* se è costante in tutti i punti fuori di un compatto di X.

Una curva $\alpha : J \to X$ ove J è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ è detta un *integrale* (per tale sistema) se per ogni $t_0 \in J$ esistono $\epsilon > 0$ ed un $i \in I$ tali che per $|h| < \epsilon$ sia $t_0 + h \in J$, $(h, \alpha(t_0 + h)) \in U^{(i)}$ e $\alpha(t_0 + h) = \Phi^{(i)}(h, \alpha(t_0))$. Se $0 \in J$ ed $x = \alpha(0)$ diremo che α *parte* da x.

Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

- la composizione di un integrale con una traslazione su $\mathbb{R}$ è ancora un integrale

- la restrizione di un integrale $\alpha : J \to X$ ad un sottointervallo $J' \subset J$ è ancora un integrale

- se α , $\beta : J \to X$ sono integrali ed esiste $t_0 \in J$ con $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ allora α e β coincidono su tutto J

Ne segue che per ogni $x \in X$, esistono un intervallo aperto J_x in $\mathbb{R}$ ed un integrale $\alpha : J \to X$ che parte da x e che non è restrizione di alcun altro integrale. Indichiamo con U l'insieme dei $(t, x) \in \mathbb{R} \times X$ tali che $t \in J_x$ e sia $\Phi : U \to X$ l'applicazione che a (t, x) associa il valore in t dell'integrale che parte da x.

Teorema 95 *U è un aperto stellato in $\mathbb{R} \times X$, $U_0 = X$ e Φ è un flusso su X. Per $x \in X$, se l'estremo superiore di J_x è un b finito, allora $\Phi(t, x)$* diverge *in X per $t \to b$ nel senso che per ogni compatto $K \subset X$, esiste $t_0 \in J_x$ tale che* *per ogni $t_0 < t < b$ sia $\Phi(t,x) \notin K$. Analogamente se l'estremo inferiore di J_x è un a finito, $\Phi(t,x)$ diverge per $t \to a$. In particolare se il sistema è a supporto compatto, il flusso Φ è completo*

Dim. Sia $x_0 \in X$; per ipotesi esiste $i \in I$ con $(0,x_0) \in U^{(i)}$. Essendo $U^{(i)}$ aperto, esistono un intorno aperto V di x_0 in X ed un intervallo aperto $J \subset \mathbb{R}$ contenente 0 con $J \times V \subset U^{(i)}$; è chiaro allora che $J \times V \subset U$ (perché per $x \in V$, l'applicazione $J \to X$ definita da $t \mapsto \Phi^{(i)}(t,x)$ è un integrale). Si è così mostrato che $U_0 = X$ ed anzi che $\{0\} \times X$ è interno ad U.

Mostriamo che anche ogni $(t_0,x_0) \in U$ con $t_0 > 0$ è interno ad U. Consideriamo l'integrale $\alpha : J \to X$ che parte da x_0; essendo J aperto, esiste $t_1 > t_0$ con $[0,t_1] \subset J$. Per la compattezza di tale intervallo e vista la definizione di integrale, esiste un intero positivo n tale che per $0 \leq \nu \leq n$ il punto $(1/n, \alpha(\nu/n)$ appartenga ad un $U^{(i_\nu)}$. Si ha allora che $\alpha(t_1)$ è ottenuto calcolando successivamente $\phi_{i_0}, \ldots, \phi_{i_{n-1}}$ a partire da x_0. Essendo ogni tale applicazione continua nel punto ove viene calcolata, si ottiene alla fine un intorno V di x_0 tale che partendo da V ed applicando successivamente $\phi_{i_0}, \ldots, \phi_{i_{n-1}}$, il codominio di ognuno è contenuto nel dominio del successivo, cosicché la composizione è definita. Quindi tutto $V \times [0,t_1]$ è contenuto in U e ciò mostra che (t_0,x_0) è interno ad U. Stessa cosa per $t_0 < 0$.

La verifica che Φ soddisfa la condizione di essere un flusso locale e che è massimale viene lasciata per esercizio. L'ultima affermazione dell'enunciato, si dimostra così : Sia $\alpha :]a,b[\to X$ l'integrale che parte da $x_0 \in X$ con b finito e supponiamo per assurdo che per $t \to b$ non si abbia la divergenza di $\alpha(t)$. Se ne deduce allora l'esistenza di una successione $t_n \in]a,b[$ con $t_n \to b$ e $\alpha(t_n)$ tendente ad un $y \in X$. L'integrale che parte da $\alpha(t_n)$ essendo ottenuto per traslazione da α è allora definito su un intervallo il cui estremo destro b_n va a zero per n che cresce (precisamente $b_n = b - t_n$). Ciò contraddice il fatto che per ogni $y \in X$ esistono un suo intorno A ed un $l > 0$ tali che ogni integrale che parte da un punto di A è definito almeno su $[0,l]$ (infatti se $y \in U_0^{(i)}$ basterà che sia $[0,l] \times A \subset U^{(i)}$).

Nel seguito saremo interessati al caso che X sia un aperto in uno spazio vettoriale di dimensione finita (o di Banach) od anche, quando avremo introdotto le varietà, una varietà differenziabile; richiederemo allora che i flussi e gli integrali associati siano differenziabili. Tutto quanto precede rimane valido sostituendo ovunque "continuo" con "differenziabile".

Campi di vettori

Sia Ω un aperto in uno spazio vettoriale E (di dimensione finita o più in generale di Banach). Un *campo di vettori* su Ω è una applicazione differenziabile $T : \Omega \to E$. Chiameremo *(curva) integrale* di un tale campo T ogni applicazione differenziabile $\alpha :]a,b[\to \Omega$ che verifichi $\dot{\alpha}(t) = T(\alpha(t))$ per ogni $t \in \Omega$. La restrizione ad un sottointervallo di un integrale è ancora un integrale e ciò permette di introdurre un semiordinamento sugli integrali di T e quindi di parlare dei suoi integrali massimali.
Se $E = \mathbb{R}^n$ con coordinate $x_1, \ldots, x_n$, dette $T_1, \ldots, T_n$ le componenti di T, la condizione sulla curva $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ di essere un integrale di T è data dalle eguaglianze:

$$\dot{x}_i(t) = T_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad \text{per} \quad i = 1, \ldots, n$$

Quindi tale condizione è precisamente un sistema di equazioni differenziali (autonomo, ossia non dipendete dal tempo) al primo ordine in forma normale.

Dal teorema di esistenza ed unicità per le soluzioni di un tale sistema si ha l'esistenza per ogni $x \in \Omega$ di un unico intervallo aperto $J_x \subset \Omega$ ed un unica curva integrale massimale $\alpha : J_x \to \Omega$ di T tale che $\alpha(0) = x$; essa verrà detta l'*integrale di T che parte da x*. Sia U l'insieme delle coppie $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ tali che $t \in J_x$. Sia $\Phi : U \to \Omega$ l'applicazione che a (t, x) associa $\alpha(t)$ essendo α l'integrale di T che parte da x.

Teorema 96 *U è un aperto di $\mathbb{R} \times E$ e $\Phi : U \to \Omega$ è un flusso differenziabile*

Per quanto visto nella trattazione dei flussi, questo teorema è un corollario del seguente:

Lemma 97 *Sia Ω un aperto di una spazio vettoriale E (di dimensione finita o di Banach) e sia $T : \Omega \to E$ un campo di vettori differenziabile. Allora per ogni $x_0 \in \Omega$ esistono un intorno aperto V di x_0 in Ω , un $l > 0$ ed una applicazione differenziabile $\Phi :] - l, l[\times V \to \Omega$ tale che $\Phi(0, x) = x$ per ogni $x \in V$ e che $t \to \phi(t - x)$ sia un integrale del campo T per ogni fissato $x \in V$*

Dim. Supponiamo per semplicità che x_0 sia l'origine di E. Poniamo $B_r = \{x \in E \ : \ ||x|| < r\}$ e supponiamo che sia $B_{2r} \subset \Omega$. Posto $I = [-1, 1]$, per k intero sia C^k lo spazio delle applicazioni $f : I \to E$ che sono k volte differenziabili; esso diviene uno spazio di Banach definendo la $||f||$ come l'estremo superiore delle $||f^{(h)}(t)||$ per $t \in I$ e $0 \leq h \leq k$. Il sottospazio C^k_0 delle $f \in C^k$ cche sono nulle per $t = 0$ è un sottospazio chiuso ed è quindi anch'esso uno spazio di Banach. Sia p un intero fissato ed indichiamo con U l'insieme delle $f \in C^{p+1}_0$ la cui immagine è contenuta in B_r; esso è chiaramente un aperto di C^{p+1}_0. Per $x \in B_r$ e $t \in I$ si ha $||x + f(t) < 2r$; è quindi ben definita una applicazione $F : \mathbb{R} \times B_r \times U \to C^p$ con la formula:

$$F(\lambda, x, f) = \dot{f}(t) - \lambda \cdot T(x + f(t))$$

Tale F è una applicazione definita su un aperto di uno spazio di Banach; essa è composizione di applicazioni differenziabili ed è quindi anch'essa differenziabile. Il differenziale di F nell'origine, ristretto alla terza componente, è l' applicazione lineare di C^{p+1}_0 in C^p che ad una $h : I \to E$ apparetenente a C^{p+1}_0 associa la sua derivata appartenente a C^p. Questo è un isomorfismo di spazi di Banach; un teorema di funzioni implicite dice allora che esiste un intorno aperto $] - a, a[\times V$ dell'origine in $\mathbb{R} \times B_r$ ed una applicazione H differenziabile di tale intorno in C^p tale che $F(\lambda, x, H(\lambda, x)) \equiv 0$. Cioè:

$$\frac{d}{dt}(H(\lambda, x)(t)) = \lambda \cdot T(x + H(\lambda, x)(t))$$

per ogni $t \in I$. Supponiamo che sia $1 \in] - a, a[$; la Φ dell'enunciato si trova allora ponendo $\Phi(t, x) = H(1, x)(t)$. In generale questa condizione non sarà soddisfatta. Sia σ_λ la curva definita su $] - \lambda, \lambda[$ da:

$$t \mapsto \sigma_\lambda(t) = x + H(\lambda, x)(t/\lambda)$$

per $-a \leq \lambda \leq a$ ed $x \in V$ fissato. Essa è un integrale del campo dato e siccome H è a valori in C^{p+1}_0 tale integrale parte da x; per il teorema di unicità degli integrali tali σ coincidono nel comune dominio di definizione. In definitiva si avrà un integrale $\sigma :]-a, a[\to \Omega$. La sua espressione in termini di H dice allora che la Φ associata è differenziabile $p+1$ volte.

Appendice 2 : Spazi vettoriali topologici

Sia V uno spazio vettoriale reale. Una struttura topologica su V è detta *compatibile* con la struttura algebrica se, ponendo su $V \times V$ e $\mathbb{R} \times V$
le topologie prodotto, le operazioni:

$$V \times V \ni (x, y) \to x + y \in V \qquad \mathbb{R} \times V \ni (\lambda, x) \to \lambda x \in V$$

sono continue. In tal caso diremo che su V è stata fissata una struttura di *spazio vettoriale topologico*. Nel seguito saremo interessati, a parte il caso di $\mathbb{R}^n$ dotato delle sue strutture standard, principalmente a tre tipi di spazi vettoriali topologici detti spazi di Banach,di Hilbert e di Frechet. In tali casi la topologia è di tipo metrico, cosicché si potrà sempre ragionare in termini di successioni; inoltre si tratterà di spazi *localmente convessi* nel senso che ora precisiamo.

Sia V uno spazio vettoriale reale. Introduciamo le seguenti nozioni:

Convessi: Un sottoinsieme $A \subset V$ è detto *convesso* se per ogni $x, y \in A$, il segmento $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y \ : \ 0 \le \lambda \le 1\}$ è contenuto in A.

Seminorme: Una funzione $p : V \to \mathbb{R}$ è detta una *seminorma* se per $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:
$-p(x) \ge 0$
$-p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$
$-p(x+y) \le p(x) + p(y)$
Una tale seminorma è detta una *norma* se inoltre si ha:
$-p(x) > 0$ per x non nullo

Spazi normati e di Banach: Uno *spazio normato* è uno spazio vettoriale reale su cui sia stata fissata una norma che solitamente viene indicata con $x \to || \ ||$. Ad una norma su V è associata una distanza d su V definita dalla formula $d(x, y) = ||x - y||$. Si verifica facilmente che con la topologia indotta da tale metrica, le operazioni di V sono continue cosicché ogni spazio normato è uno spazio vettoriale topologico. Uno spazio di Banach è uno spazio normato che, in quanto spazio metrico, sia completo.

Spazi di Hilbert: Ricordiamo che un *prodotto scalare* su V è una forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ che sia definita positiva nel senso che $b(x, x) > 0$ per $x \neq 0$ in V. Uno spazio V su cui sia stato fissato un prodotto scalare viene detto uno *spazio di pre-Hilbert.* Ad ogni tale prodotto si associa una norma su V definita dalla formula $||x|| = \sqrt{b(x, x)}$ (che questa sia effettivamente una norma si verifica come si è fatto in Analisi per $\mathbb{R}^n$, dimostrando la disuguaglianza di Schwartz) cosicché V diviene uno spazio normato; se con tale norma lo spazio risulta completo diremo che V è uno *spazio di Hilbert.* In definitiva quindi, uno spazio di Hilbert è uno spazio di Banach nel quale $|| \ ||^2$ è una forma quadratica, ossia è tale che la funzione $||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2$ è bilineare.

Spazi di Frechet: Sia p una seminorma su V. La formula $d(x, y) = p(x - y)$

definisce una *pseudodistanza* d che induce una topologia su V, ovviamente non di Hausdorff se p non è una norma. Ad una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme su V , associamo la topologia meno fine tra quelle più fini delle topologie associate agli elementi di $\mathcal{P}$; precisamente un punto $x_0 \in V$ è detto interno ad un sottoinsieme $A \subset V$ se e solo se esistono un numero finito $p_1, \dots, p_r$ di elementi di $\mathcal{P}$ ed $\epsilon > 0$ tali che ogni $x \in V$ che verifichi $p_i(x) < \epsilon$ per $i = 1, \dots, r$ è contenuto in A.

Tale topologia sarà di Hausdorff se e solo se è verificata la seguente condizione: per ogni $x \in V$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) > 0$. Supponiamo che ciò avvenga e che $\mathcal{P}$ sia (al più) numerabile; diremo che V è uno *spazio di Frechet* se esso è $\mathcal{P}$-completo nel senso che se una successione (x_n) in V è di Cauchy per ogni elemento di $\mathcal{P}$, allora esiste $x \in V$ tale che $p(x_n - x)$ tende a zero per ogni $p \in \mathcal{P}$.

Possiamo riformulare questa condizione utilizzando le seguenti osservazioni:
- se d è una distanza (o una pseudodistanza) su un insieme X ed r è una costante positiva, allora $d' = r \cdot d$ e $d'' = d/(1 + d)$ sono distanze su X che inducono la stessa topologia ed hanno le stesse successioni di Cauchy di d.
- se $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di (pseudo-)distanze su un insieme X per le quali $d_n \leq 2^{-n}$, allora $d = \sum_n d_n$ è una distanza su X per la quale le successioni di Cauchy sono precisamente quelle che sono di Cauchy per ciascuna d_n e la topologia indotta da d è quella meno fine tra quelle che sono più fini delle topologie indotte dalle d_n.

Ne segue che uno spazio di Frechet è uno spazio vettoriale topologico in cui la topologia è indotta da una metrica d rispetto alla quale esso è completo e che è esprimibile come una serie:

$$d = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} d_n / (1 + d_n)$$

essendo d_n la pseudometrica associata ad una seminorma.

Note

1. Sia V uno spazio vettoriale topologico in cui i punti (basta supporlo per l'origine) possiedano un sistema fondamentale di intorni che sia numerabile. Diremo che una successione (x_n) in V è di Cauchy se per ogni intorno U di $0 \in V$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per $n, m \geq n_0$ si abbia $x_n - x_m \in U$. In tale situazione ha quindi un senso parlare di completezza senza fare riferimento ad una metrica su V.

Diremo inoltre che V è *localmente convesso*, se ogni intorno dell'origine ne contiene uno convesso.

Si può dimostrare, che gli spazi di Frechet sono precisamente quelli che sono localmente convessi, possiedono un sistema fondamentale di intorni dell'origine che è numerabile e che sono completi.

2. Le definizioni di spazi di Banach, Hilbert e Frechet date sopra hanno analoghe ovvie nel caso di spazi vettoriali complessi. Osserviamo solo che se su un tale V è definita una norma in quanto spazio vettoriale reale, affinché essa sia una norma sui complessi non basta supporre che sia invariante per la moltiplicazione per i, ma occorre che esso sia invariante per la moltiplicazione per ogni numero complesso di modulo uno. Ad esempio su $\mathbb{C}$ la norma del sup tra parte reale e parte immaginaria è una norma sui reali, è invariante per la moltiplicazione per i ma non è una norma sui complessi.

Nel caso di spazi di Hilbert sui complessi,il prodotto scalare $< \, , \, >$ deve essere una forma hermitiana; la sua parte reale è allora un prodotto scalare sui reali che è i-invariante. Viceversa se su uno spazio vettoriale complesso viene dato un prodotto scalare in quanto spazio sui reali, che sia i-invarinte, esso è la parte reale di un prodotto scalare sui complessi univocamente determinato. Quindi le strutture di spazio di Hilbert complesso sono precisamente le strutture di Hilbert reali in cui la norma associata si i-invariante.

3. Quasi sempre accade che nell'utilizzo di uno spazio di Banach è la topologia ad essere rilevante mentre la norma giuoca un ruolo sussidiario. Così in $\mathbb{R}^n$ la norma euclidea o quella del sup possono essere utilizzate indifferentemente nelle stragrande maggioranza delle situazioni. In effetti gli spazi di Banach che introdurremo non avranno generalmente una norma avente un qualche significato intrinseco (o "geometrico"). La stessa cosa per gli spazi di Frechet. Per questa ragione sarebbe forse stato preferibile definire questi spazi come spazi vettoriali topologici la cui topologia può essere introdotta da una norma o da una famiglia di seminorme come descritto sopra. La stessa cosa accade in topologia quando si studiano gli spazi metrici ma la particolare metrica non è rilevante: si parla allora più propriamente di spazi metrizzabili.

Al contrario, nell'uso degli spazi di Hilbert, il prodotto scalare ha spesso un significato intrinseco ed è quindi importante di per se.

Esempi Sia V lo spazio delle funzioni continue a valori reali su uno spazio topologico X. Supporremo che X sia localmente compatto ed a base numerabile; essenzialmente possiamo pensare ad un sottoisieme chiuso in qualche $\mathbb{R}^N$. Se $K \subset X$ è un compatto fissato, introduciamo una seminorma su V ponendo, per $f \in V$:

$$||f||_K = sup\{|f(x)| \ : \ x \in K\}$$

Se $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia esaustiva di compatti di X (ossia i K_n sono compatti, ognuno è contenuto nella parte interna del successivo e la loro unione è tutto X), allora la famiglia $|| \ ||_{K_n}$ per $n \in N$ definisce su V una struttura di spazio di Frechet; ciò si deduce facilmente dal teorema che assicura che il limite di una successione uniformemente convergente di funzioni continue è una funzione continua. Si verifica inoltre che tale topologia su V è indipendente dalla scelta della famiglia esaustiva di compatti.

E' immediato verificare che se X stesso è compatto, la topologia introdotta su V coincide con la topologia associata ad una norma, precisamente la $|| \ ||_X$; ossia V è uno spazio di Banach. E' anche abbastanza facile dimostrare che viceversa se tale V è di Banach, ossia se esiste una norma che induce la topologia di V, allora X deve essere compatto. In particolare lo spazio di Frechet delle funzioni continue su un aperto (non vuoto) di $\mathbb{R}^n$ non è di Banach.

Come vedremo, analoghe strutture di Frechet si introducono sugli spazi di funzioni differenziabili definite o su aperti di $\mathbb{R}^n$ o più in generale su spazi sui quali abbia senso parlare di differenziabilità, come le varietà differenziabili.

Un esempio standard di spazio di Hilbert è lo spazio l_2 costituito dalle successioni $x = (x_n)$ di numeri reali (complessi se si vuole uno spazio di Hilbert sui complessi) aventi quadrato sommabile, ossia tali che $||x||^2 = \sum_1^\infty x_n^2 < +\infty$. Si noti che sul sottoinsieme costituito dalle successioni aventi nulle tutte le componenti dopo le prime n, la funzione $|| \ ||$ induce una struttura identificabile ad $\mathbb{R}^n$ dotato della sua struttura di Hilbert standard. Utilizzando la disuguaglianza di Schwartz in $\mathbb{R}^n$, si dimostra facilmente che se $x = (x_n)$ ed $y = (y_n)$ appartengono ad l_2 , risulta ben definito il numero $< x, y >= \sum_1^\infty x_n y_n$ e che si ottiene così un prodotto scalare su l_2 la cui norma associata è proprio $|| \; ||$. Ancora facilmente si verifica che l_2 con tale struttura è completo e che è quindi uno spazio di Hilbert.

Lo spazio di Hilbert descritto ora ha lo stesso ruolo che ha $\mathbb{R}^n$ per gli spazi vettoriali di dimensione finita dotati di un prodotto scalare: introducendo in un qualsiasi spazio di Hilbert (purché separabile) una base ortonormale, si ottiene un isomorfismo tra H ed l_2 che conserva i prodotti scalari. Insomma l_2 viene utilizzato per dare "sistemi di coordinate" agli spazi di Hilbert che si vogliono studiare.

Nella pratica spesso gli spazi di Hilbert appaiono come spazi di funzioni, sui quali il prodotto scalare è dato in forma di un integrale. Ad esempio sia V lo spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ a valori reali e definiamo il prodotto scalare tra due funzioni $f, g \in V$ tramite la formula:

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Oppure sullo spazio W delle funzioni con derivata continua su $[0, 1]$, si ponga:

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

In questo modo ed in altri analoghi che tratteremo, si ottiene uno spazio di pre-Hilbert che non è completo. Con procedimenti astratti generali, partendo ad esempio dallo spazio di tutte le successioni di Cauchy di V, si costruisce un suo "completamento" (univocamente determinato da ovvie condizioni) che risulta essere uno spazio di Hilbert; tale costruzione è totalmente analoga a quella con la quale si ottiene $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$.

Ma in genere tale costruzione astratta è poco interessante (utilizzabile) a meno che non si forniscano sue interpretazioni in termini di spazi di funzioni e questa parte è di solito quella più complicata; queste questioni verranno affrontate negli studi di Analisi Funzionale dopo l'introduzione dell'integrale di Lebesgue, quando verrà approfondito anche lo studio degli spazi di Banach. Per il momento avremo bisogno solo dei pochi fatti sugli spazi di Banach che qui di seguito esponiamo.

Alcune generalità sugli spazi di Banach

Siano V , W spazi di Banach. Indicheremo con le notazioni $\mathcal{L}(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari e continue $\phi : V \to W$. Su tale spazio considereremo la norma definita da:

$$||f|| = sup\{||f(x)|| \ : \ x \in V \ , \ ||x|| = 1\}$$

Si verifica facilmente che con tale norma $\mathcal{L}(V, W)$ è completo ed è quindi uno spazio di Banach. Più in generale per r intero, indichiamo con $\mathcal{L}_r(V, W)$ lo spazio delle applicazioni $r-$lineari e continue $b : V^r \to W$; tale spazio diviene uno spazio di Banach con la norma:

$$||b|| = sup\{||b(x_1, \ldots, x_r)|| \ : \ x_1, \ldots, x_r \in V \quad \text{sono di norma uno}\}$$

Si dimostra in modo ovvio che con tali stutture le mappe di "composizione di applicazioni" sono continue, nel senso che ad esempio se U,V e W sono spazi di Banach, risulta continua l'applicazione:

$$\mathcal{L}(V,W) \times \mathcal{L}(U,V) \ni (f,g) \to f \circ g \in \mathcal{L}(U,W)$$

così come sono continue altre trasformazioni naturali tra spazi ottenuti a partire da spazi di Banach con costruzioni "funtoriali" come fatto sopra.

Tali fatti sono però veri (e facili da dedurre), nel caso di spazi di Banach ma per spazi di tipo più generale può essere impossibile dotare gli $\mathcal{L}(V,W)$ di topologie naturali in modo che le composizioni siano applicazioni continue. Anche per gli spazi di Banach bisogna avere qualche cautela: non tutto funziona come in dimensione finita. Ad esempio una applicazione $f : V \to W$ lineare e continua tra spazi di Banach, ha nucleo ma non necessariamente conucleo di Banach. Con ciò intendiamo dire che esistono successioni esatte (parliamo di applicazioni lineari e continue tra spazi di Banach):

$$0 \to K \to V \xrightarrow{f} W$$

(basta prendere $K = ker f$ e $K \to V$ l'inclusione) ma può non esisterne alcuna del tipo:

$$0 \to K \to V \xrightarrow{f} W \to H \to 0$$

Infatti f può avere immagine non chiusa, come accade ad esempio per l'inclusione di $C^1([0,1])$ in $C^0([0,1])$.

Un'altra complicazione è che un sottospazio H di uno spazio di Banach V che sia chiuso, può non possedere alcun supplementare chiuso; ossia non è detto che esista un altro sottospazio chiuso in V tale che $H \cap K = (0)$ e $H \oplus K = V$.

Nel seguito, alcuni teoremi di "funzioni implicite" su spazi di Banach saranno dimostrati solo nel caso che le applicazioni linearizzanti (i differenziali) siano applicazioni lineari aventi immagine chiusa e dotata, assieme al nucleo, di supplementare chiuso.

Alcuni risultati fondamentali per spazi vettoriali topologici

Un sottoisieme C di uno spazio vettoriale V è detto *stellato* in $x \in V$ se per ogni $y \in C$ tutto il segmento $[x,y]$ è contenuto in C.

Lemma 98 *In ogni spazio vettoriale topologico gli aperti stellati in un punto x costituiscono un sisteme fondamentale di intorni di x. In particolare ogni tale spazio è localmente connesso per poligonali*

Dim. Siano V uno spazio vettoriale topologico ed A un intorno dell'origine. Essendo il prodotto per gli scalari una applicazione continua, esistono un intorno aperto B dell'origine ed un $\epsilon > 0$ tali che $\tilde{B} = \{\lambda \cdot x \ : \ x \in B \ , \ |\lambda| < \epsilon\}$ è contenuto in A. Un tale $\tilde{B}$ è evidentemente stellato in 0 ed è aperto perché unione dei $\lambda \cdot B$ per $0 < |\lambda| < \epsilon$ che sono aperti in V.

Teorema 99 *Un funzionale lineare su uno spazio vettoriale topologico è continuo se e solo se ha nucleo chiuso*

Dim. Sia $\sigma : V \to \mathbb{R}$ lineare non identicamente nulla e sia H il suo nucleo.
E' ovvio che se σ è continuo, allora H è chiuso. Supponiamo che H sia chiuso ossia che $U = V - H$ sia un aperto. Essendo V localmente connesso per poligonali, le componenti connesse di U sono aperte e coincidono con le componenti connesse per poligonali; queste per la continuità di applicazioni lineari in dimensione finita sono $U_+ = \{x \in V \ ; \ \sigma(x) > 0\}$ ed il suo opposto $U_- = -U_+$. Se $a < b$ sono numeri reali, scelti $x, y \in V$ con $\sigma(x) = a$ e $\sigma(y) = b$, si ha che $\sigma^{-1}(]a, b[)$ è l'intersezione tra $y + U_+$ e $x + U_-$ che è aperto cosicché σ è continua.

Chiameremo *iperpiano* in uno spazio vettoriale topologico V ogni sottospazio che sia nucleo di qualche funzionale lineare e continuo $\sigma : V \to \mathbb{R}$.

Teorema 100 *Su uno spazio vettoriale di dimensione finita V esiste una ed una sola struttura di spazio vettoriale topologico di Hausdorff*

Dim. Scelta una base $e_1, \ldots, e_n$ di V sia $\phi : \mathbb{R}^n \to V$ l'applicazione lineare definita da $\phi(x_1, \ldots, x_n) \to \sum_1^n x_i e_i$. Dalla compatibilità delle operazioni con la topologia si ottiene la continuità di ϕ. Identificando V con $\mathbb{R}^n$, resta quindi da verificare che per ogni topologia di spazio vettoriale topologico su $\mathbb{R}^n$, ogni disco $B = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x|| < r\}$ è un intorno dell'origine. Ed infatti per la continuità di σ, l'insieme S dei vettori di norma r è compatto; essendo lo spazio localmente connesso per poligonali, il complementare di S avrà componenti connesse aperte ognuna delle quali è contenuta o in B o nell' insieme B' dei vettori di norma maggiore di uno, perchè ogni segmento disgiunto da S è tutto contenuto o in B o in B'. Ne segue che la componente connessa del complementare di S che contiene l'origine è contenuta in B che è quindi un intorno dell'origine.

Lemma 101 *Sia V uno spazio vettoriale topologico. Se $\{0\}$ è chiuso allora V è regolare, ossia i punti sono chiusi e ogni un chiuso e punto fuori di esso hanno intorni disgiunti*

Dim. Essendo le traslazioni degli omeomorfismi di V in se, nelle ipotesi fatte ogni punto di V è chiuso. Sia F un chiuso non contenente l'origine. Essendo l'applicazione di $V \times V \to V$ definita da $(x, y) \to x - y$ continua in $(0, 0)$, deve esistere un intorno aperto U dell'origine in V tale che $\{x - y \ : \ x, y \in U$ sia disgiunto da F e ciò significa che U e $U + F$ sono disgiunti. Basta allora osservare che $U + F$ è unione degli $U + f$ per $f \in F$ ed è quindi un intorno aperto di F.

Corollario 102 *Se V è uno spazio vettoriale topologico ed M è un sottospazio vettoriale chiuso, allora V/M dotato della topologia quoziente è uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff*

Teorema 103 *Siano V uno spazio vettoriale topologico, $M \subset V$ un sottospazio chiuso ed A un aperto convesso con $A \cap M = \emptyset$. Allora esiste un funzionale lineare e continuo $\sigma : V \to \mathbb{R}$ il cui nucleo contiene M ed è disgiunto da A*

Dim. L'enunciato è vero se $\dim(V) = 2$ ed $M = (0)$. Infatti $\tilde{A} = \bigcup_{t>0} t \cdot A$ è un aperto e siccome A è convesso e non contiene 0, esso sarà disgiunto dal suo opposto $-\tilde{A}$. L'unione di $\tilde{A}$ con $-\tilde{A}$ non può quindi contenere tutto l'insieme S^1 dei punti di norma uno perché questo è connesso cosicché esiste una retta L per l'origine in $\mathbb{R}^2$ non contenuta in tale unione e quindi disgiunta da A; si prenda allora per σ un qualsiasi funzionale su $\mathbb{R}^2$ avente per nucleo L.

Il caso generale verrà dimostrato ora per induzione.
Sia $\mathcal{H}$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di V che contengono M e sono disgiunti da A; per il lemma di Zorn esiste in $\mathcal{H}$ un elemento massimale rispetto al semiordinamento dato dall'inclusione; sia H_0 un tale elemento. E' facile verificare che se $\mathcal{H}$ contiene un elemento contiene anche la sua chiusura topologica cosicché H_0 deve essere chiuso. Poniamo $V' = V/H_0$ e sia $\pi : V \to V'$ la proiezione canonica. Se dim$V' = 1$ esso, essendo di Hausdorff, è identificabile ad $\mathbb{R}$ e π fornisce il σ dell'enunciato.

Supponiamo per assurdo dim$V' > 1$ e sia W un suo sottospazio di dimensione due. Allora essendo π, come tutte le mappe quozienti tra spazi vettoriali topologici, una mappa aperta, l'insieme $\pi(A) \cap W$ è un aperto convesso che non contiene l'origine nel piano W; se $L \subset W$ è una retta per l'origine disgiunta da esso, allora $\pi^{-1}(L)$ è un elemento di $\mathcal{H}$ che contiene strettamente H_0, contraddicendo quindi la sua massimalità.

Corollario 104 (Teorema di Hahn-Banach) *In uno spazio localmente convesso di Hausdorff, i funzionali lineari e continui separano i punti. Ossia per ogni punto $x \in V$ esiste $\sigma : V \to \mathbb{R}$ lineare e continua tale che $\sigma(x) \neq 0$*

Dim. Si applichi il teorema precedente con $M = (0)$ ed A un intorno convesso di x che non contenga l'origine.

Teorema 105 (Banach) *Siano V , V' spazi vettoriali topologici la cui topologia è indotta da metriche invarianti per traslazioni e rispetto alle quali essi siano completi (siano ad esempio spazi di Frechet). Allora ogni applicazione lineare e continua $f : V \to V'$ che sia surgettiva è aperta. In particolare ogni isomorfimo algebrico che sia continuo tra spazi di tale tipo è anche un omeomorfismo*

Dim. Indichiamo con $B(\epsilon)$ (risp. $B'(\epsilon)$) la palla aperta di centro l'origine e raggio ϵ in V (risp V'). Basterà mostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $B'(\delta) \subset f(B(\epsilon))$.

Mostriamo dapprima che dato ϵ esiste un $\delta > 0$ per cui $B'(\delta)$ è contenuto nel chiuso $\overline{f(B(\epsilon)}$.

Infatti gli insiemi $n \cdot B(\epsilon/2)$ per n intero positivo coprono tutto V per cui le loro immagini coprono tutto V'. Essendo V' metrico completo, almeno una di tali immagini ha chiusura a parte interna non vuota ed essendo ciascuno di essi immagine del primo per una omotetia di V' in se ciò sarà vero già per il primo; esisteranno quindi un $x \in B(\epsilon/2)$ ed una palla di centro $f(x)$ e raggio $\delta > 0$ contenuta nella chiusura di $f(B(\epsilon/2))$. Ricordando che le distanze sono invarianti per traslazioni, se ne deduce che $B'(\delta) \subset \overline{f(B(\epsilon))}$.

Per i intero positivo scegliamo $\delta_i > 0$ tale che $B'(\delta_i) \subset \overline{f(B(\epsilon_i))}$ ove $\epsilon_i = 2^{-i}\epsilon$. Mostreremo che $B'(\delta_1) \subset f(B(\epsilon)$. Ed infatti dato $y \in B(\delta_1)$ si scelga $x_1 \in B(\epsilon_1)$ tale che $\mathrm{d}(y - f(x_1), 0) < \delta_2$ ossia $y - f(x_1) \in B'(\delta_2)$; si scelga quindi un $x_2 \in B(\epsilon_2)$ per cui $(y - f(x_1)) - f(x_2) = y - (f(x_1 - x_2) \in B'(\delta_3$ e così via. La serie $\sum_1^{+\infty} x_n$ converge in V ad un elemento di $B(\epsilon)$. Si noti infatti che se d è una distanza invariante per traslazioni su uno spazio V, per n intero positivo ed $x \in V$ si ha $\mathrm{d}(n \cdot x, 0) \leq n \cdot \mathrm{d}(x, 0)$ (si utilizzi la disuguaglianza triangolare alla successione di punti x , $x + x, \ldots$). Da cio ò segue che la serie $\sum_1^{+\infty} x_n$ è di Cauchy e quindi sommabile per la completezza di V ed anche che la sua somma x ha distanza inferiore ad ϵ dall'origine. Si ha poi $d(y, f(x_1 + \ldots + x_n) < \delta_{n+1}$ e ciò assicura che $f(x) = y$ se si è scelta,come era lecito la successione δ_n in modo che converga a zero.