

COMPITO DI ANALISI del 13 Gennaio 2005

NOME (scrivere stampatello):

COGNOME (scrivere stampatello):

NUMERO DI MATRICOLA:

NUMERO DI RIGA:

(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)

NUMERO DI COLONNA:

(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$, mentre se è dispari sia $v = 1$

Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$, mentre se è dispari sia $w = 1$

(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ e $w = 0$);

Chi fa solo una parte ha **1h 30m** minuti di tempo; chi fa due parti ha **2h 40m** di tempo e chi fa tre parti ha **3h** di tempo.

PRIMA PARTE

Esercizio 1

Si dimostri per induzione su n che

$n^2 - 2nv + 2n + v^2 + 1 \geq 2v$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2

Si calcoli la lunghezza dei seguenti insiemi S e T :

a) $S = [-3 + v, w) \cup [-1, v] \cup (1, v + w + 2)$

b) $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k+v}, w + 2]$

Esercizio 3

Se $v = 0$, si calcoli l'integrale $\int_0^2 ((3 + w)\chi_{[-1,1]} + 2x^3)dx$

Se $v = 1$, si calcoli l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} ((w + 1)\sin(x) + x^4)dx$

Esercizio 4

Se $v = 0$, si calcoli l'integrale $\int_0^{\pi} ((2 + w)\cos(x) + 1)dx$

Se $v = 1$, si calcoli l'integrale $\int_{-2}^1 ((w + 2)\chi_{[-3,0]}(x) + \cos(x))dx$

SECONDA PARTE

Esercizio 5

Sia data la successione $\{a_n\} = \frac{n^2+v+1}{(2+w)n^2+n+v}$. Si calcoli, se esiste, il limite di $\{a_n\}$ per n che tende a $+\infty$.

Esercizio 6

Se $v = 0$, si trovi una primitiva $r(x)$ della funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = 2|x| + (2-w)x^2$, dimostrando che la funzione r trovata soddisfa $r'(x) = f(x)$. (suggerimento: distinguere $x > 0$ e $x < 0$)

Se $v = 1$, si calcoli l'integrale $h(x) = \int_0^x g(t)dx$, dove $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è data da $g(t) = t^3 + (w + 1)|t|$. Dopo avere calcolato l'integrale, si calcoli la derivata della funzione h . (suggerimento: distinguere $x > 0$ e $x < 0$).

Esercizio 7

Sia

$$f(x) = \begin{cases} vx^2 + (1-v)\sin(x) + \cos(x) - 1 & \text{quando } x > 0 \\ w\cos(x) + (1-w)e^x + x^3 - 1 & \text{quando } x \leq 0 \end{cases}$$

Si dimostri che f è una funzione continua.**Esercizio 8**

Sia

$$f(x) = x^3 + v(x^2 + wx - 1) + (1-v)(2x^2 - x + w) + w(4x^2 + wx) + (1-w)(3x^2 - 2wx)$$

- Trovare tutti i punti di massimo e di minimo relativo di f su \mathbb{R} .
- La funzione f assume valore massimo o minimo assoluto in qualche punto?
- Trovare il massimo ed il minimo (assoluti) di f ristretta a $[-5 + v, 5 + w]$.

TERZA PARTE**Esercizio 9**

- Sia $A = [-1, v] \cup [2, 3 + w]$. Dimostrare a partire dalle definizioni che A è un insieme misurabile, e calcolarne la lunghezza.
- Dimostrare che $A \cap \mathbb{Q}$ è un insieme misurabile, e calcolarne la lunghezza.

Esercizio 10Si dimostri per induzione che per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, $n \geq w + 2$, vale

$$n^3 + n > (v + 1)n^2 - w - v$$

Esercizio 11Sia $f(x) = e^{|x|+v+1}$.

- Si calcoli la derivata di f in tutti i punti diversi da 0.
- Si dimostri che f non è derivabile in 0.
- Data la funzione $g(x)$ definita come $f'(x)$ per $x \neq 0$ e uguale a 2 nel punto $x = 0$, si calcoli la funzione $\int_1^x g(t)dt$.

Esercizio 12Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato nel punto 1, della funzione $f(x) = e^{(v+2)\cos(x)} + 2x^{w+3}$.