## GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE A.A. 2001-2002

*Soluzione terzo esercizio secondo compitino (parte in classe). Sono stati omessi i calcoli elementari, che devono comunque essere presenti (o quantomeno indicati) in uno svolgimento completo.*

---

i) La normale al parallelo passante per $p_0$ giace nel piano $z = 0$, mentre la normale a $S$ nei punti del supporto del parallelo ha sempre una componente verticale non nulla. Ne segue che il parallelo non è una geodetica di $S$.

---

ii) Per il teorema di Clairaut si ha che $r(s)cos\theta(s) = costante$, indicando con $\theta(s)$ l'angolo (compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$) fra $\dot{\sigma}(s)$ e la direzione del parallelo passante per $\sigma(s)$. Poichè $r(0) = \frac{1}{2}$ e $\theta(0) = 0$, si deve avere $r(s)cos\theta(s) = \frac{1}{2}$, da cui seguono le disuguaglianze dato che $-1 \leq cos(\theta) \leq 1$.

---

iii) Il vettore $(-y(s), x(s), 0)$ è uguale a $r(s)v(s)$, dove $v(s)$ è la direzione del parallelo passante per il punto $(x(s), y(s), z(s))$ (questo si verifica osservando che $(-y, x, 0) \cdot (x, y, 0) = 0$ e $|(-y, x, 0)| = r$). Ne segue che

$$\frac{1}{2} = r(s)cos(\theta(s)) = r(s)(\dot{x}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s)) \cdot v(s) =$$

$$= (\dot{x}(s), \dot{y}(s), \dot{z}(s)) \cdot (-y, x, 0) = x(s)\dot{y}(s) - \dot{x}(s)y(s)$$

L'uguaglianza di $x(s)\dot{y}(s) - \dot{x}(s)y(s)$ con $r^2\dot{\phi}$ è un calcolo esplicito a partire dall'espressione di $\sigma(s)$.
Le disuguaglianze su $\dot{\phi}$ seguono da $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$, mentre quelle su $\phi$ si ottengono integrando $\dot{\phi}$.

---

iv) Per la prima equazione, si osserva che l'equazione di definizione dell'ellissoide si puo' riscrivere come $r^2 + \frac{z^2}{100} = 1$. Derivando questa espressione rispetto a $s$, si ottiene l'equazione cercata.
Per la seconda equazione, basta osservare che $|\dot{\sigma}(s)|^2 = 1$ (in quanto la geodetica è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco), e riscrivere quest'ultima relazione usando l'espressione esplicita per $\sigma(s)$ e la relazione $r^2\dot{\phi} = \frac{1}{2}$ ottenuta al punto precedente.
La relazione $|\dot{z}| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ segue dalla seconda delle equazioni precedenti e

dal fatto che $\dot{\phi} \geq \frac{1}{2}$. Se $\dot{z} = 0$, allora $r\dot{r} = 0$, da cui $\dot{r} = 0$ in quanto $r \geq 0$. Ne segue che $\dot{\phi} = 2$, e quindi $r^2 = \frac{1}{2\dot{\phi}} = \frac{1}{2}$. Se $r = \frac{1}{2}$, allora $\dot{\phi} = 2$, e quindi devono essere $(\dot{r})^2 = |\dot{z}|^2 = 0$.

---

v) Da $\phi(s_0) = \pi$ e $2s \geq \phi(s) \geq \frac{1}{2}s$ segue che $\frac{pi}{2} \leq s_0 \leq 2\pi$.
Dalla disuguaglianza su $s_0$ e dal fatto che $|\dot{z}| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ segue che $5\sqrt{3} - \pi\sqrt{3} \leq z(s)$ per $0 \leq s \leq s_0$, mentre da Clariaut segue che $z(s) \leq 5\sqrt{3}$ per $0 \leq s \leq s_0$.
Se fosse $z(s) = \frac{5}{\sqrt{3}}$ per $0 \leq s \leq \epsilon$ con $0 < \epsilon$ piccolo a piacere, si avrebbe che un segmento iniziale di $\sigma$ coincide con il parallelo passante per $p_0$, ma questo è impossibile per lo stesso ragionamento usato per dimostrare il punto i). Ne segue che per qualunque $\epsilon > 0$ deve esistere $0 < s_\epsilon < \epsilon$ con $z(s_\epsilon) < \frac{5}{\sqrt{3}}$. Supponiamo ora che esista $s \in (0, s_0]$ con $r(s) = \frac{1}{2}$. Dato che $0 < 5\sqrt{3} - \pi\sqrt{3} \leq z(s)$, deve essere $z(s) = 5\sqrt{3}$. Dato che per quanto visto prima esistono punti in $(0, s)$ con $z(s) < 5\sqrt{3}$, deve esistere $s_1 \in (0, s)$ con $z(s_1) < 5\sqrt{3}$ e $\dot{z}(s_1) = 0$. questo pero' è impossibile, perchè $\dot{z}(s_1) = 0$ implica $r(s_1) = \frac{1}{2}$ e quindi $z(s_1) = 5\sqrt{3}$. Abbiamo quindi che $0 < z(s) < 5\sqrt{3}$ per $s \in (0, s_0]$, da cui segue che $r(s) < 1$ e $r(s) > \frac{1}{2}$, e quindi $\dot{z}(s) < 0$. Questo dimostra che $z$ è monotona decrescente in $[0, s_0]$.

---

vi) Sia $T$ la riflessione di $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano $xz$, e sia $\gamma(s) = T(\sigma(s))$. Poichè $T$ induce una isometria di $S$, la curva $\gamma(s)$ è una geodetica di $S$. Inoltre $\gamma(0) = p_0$, e $\dot{\gamma}(0) = T(\dot{\sigma}(0)) = (0, 1, 0) = -\dot{\sigma}(0))$. D'altra parte, la curva $s \to \sigma(-s)$ è anch'essa una geodetica di $S$ passante per $p_0$ per $s = 0$, e con vettore tangente in $p_0$ uguale a $-\dot{\sigma}(0))$. Per l'unicita' della geodetica passante per un punto dato con vettore tangente assegnato, deve essere $\gamma(s) = \sigma(-s)$. Questo significa che $\sigma(-s) = T(\sigma(s))$ e quindi, dato che $T(\sigma(s_0)) = \sigma(s_0)$ per costruzione, deve essere $\sigma(-s_0) = \sigma(s_0)$.

---

vii) Per il punto precedente, $\dot{\sigma}(-s_0) = -T(s\dot{i}gma(s_0))$, e quindi puo' valere l'uguaglianza $s\dot{i}gma(s_0) = \pm\dot{\sigma}(-s_0)$ se e solo se $T(s\dot{i}gma(s_0)) = \pm s\dot{i}gma(s_0)$. Questo implica che o $s\dot{i}gma(s_0)$ giace nella direzione $(0, 1, 0)$ o giace nel piano $xz$. Il primo fatto implicherebbe $\dot{z}(s_0) = 0$, che sappiamo non essere possibile dai punti (iv) e (v). Il secondo fatto implicherebbe $cos(\theta(s_0)) = 0$, che è impossibile per il teorema di Clairaut.