

ESERCIZI DEL CORSO DI GEOMETRIA I

MICHELE GRASSI

Esercizio 1

Sia $V = \mathbf{R}^3$, e sia b il prodotto scalare su V per il quale i vettori

$$(1, 2, 3), (3, 5, 1), (1, 2, 0)$$

sono ortonormali. Si descriva esplicitamente il polinomio di secondo grado $p(x_1, x_2, x_3) = \phi((x_1, x_2, x_3))$, dove ϕ e' la forma quadratica associata a b .

Esercizio 2

Sia $L : M_2(\mathbf{R}) \rightarrow M_2(\mathbf{R})$ la funzione definita come $L(A) = (A^{(t}A))_{(1,1)}$, ovvero l'entrata in riga 1 e colonna 1 della matrice ottenuta moltiplicando A per la sua trasposta.

- 1) Si dimostri che L e' una forma quadratica, ottenendo la forma bilineare simmetrica b di cui e' la forma quadratica associata.
- 2) Si calcoli la matrice associata alla forma bilineare associata a L rispetto al prodotto scalare standard su $M_2(\mathbf{R})$.

Esercizio 3

Sia $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a tre. Sia $f : V \rightarrow V$ la funzione

$$f(p(x)) = (x + 1) \frac{\partial p(x)}{\partial x}$$

- 1) Si dimostri che f e' lineare.
Si consideri su V il prodotto scalare b per il quale i polinomi $1 + x, x + x^3, 2 + x^2, 1 + x^3$ sono ortonormali.
- 2) Si calcoli la trasposta di f rispetto al prodotto scalare b .