

## ESERCIZI DEL CORSO DI GEOMETRIA I

MICHELE GRASSI

### Esercizio 1

Sia  $V = \mathbf{R}^3$ , e sia  $b$  il prodotto scalare su  $V$  per il quale i vettori

$$(1, 2, 3), (3, 5, 1), (1, 2, 0)$$

sono ortonormali. Si descriva esplicitamente il polinomio di secondo grado  $p(x_1, x_2, x_3) = \phi((x_1, x_2, x_3))$ , dove  $\phi$  e' la forma quadratica associata a  $b$ .

### Esercizio 2

Sia  $L : M_2(\mathbf{R}) \rightarrow M_2(\mathbf{R})$  la funzione definita come  $L(A) = (A^{(t}A))_{(1,1)}$ , ovvero l'entrata in riga 1 e colonna 1 della matrice ottenuta moltiplicando  $A$  per la sua trasposta.

- 1) Si dimostri che  $L$  e' una forma quadratica, ottenendo la forma bilineare simmetrica  $b$  di cui e' la forma quadratica associata.
- 2) Si calcoli la matrice associata alla forma bilineare associata a  $L$  rispetto al prodotto scalare standard su  $M_2(\mathbf{R})$ .

### Esercizio 3

Sia  $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$  lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a tre. Sia  $f : V \rightarrow V$  la funzione

$$f(p(x)) = (x + 1) \frac{\partial p(x)}{\partial x}$$

- 1) Si dimostri che  $f$  e' lineare.  
Si consideri su  $V$  il prodotto scalare  $b$  per il quale i polinomi  $1 + x, x + x^3, 2 + x^2, 1 + x^3$  sono ortonormali.
- 2) Si calcoli la trasposta di  $f$  rispetto al prodotto scalare  $b$ .