

Compito di "Calcolo Numerico"

D.U. teledidattico Piombino.

12 Gennaio 2001.

=====

1. È data l'equazione

$$e^x - \cos x - 2 = 0 .$$

Determinare quante sono le radici reali e per ciascuna di esse indicare un intervallo di separazione.

Approssimare la radice reale α più grande con il metodo di Newton determinando un valore x' tale che $|x' - \alpha| \leq 10^{-2}$.

2. Sono dati la matrice A ed il vettore b

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

a) Calcolare la matrice A^{-1} .

b) Risolvere il sistema $Ax = b$.

c) Studiare il metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema $Ax = b$.

3. Determinare a, b, c in modo che la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = af(-1) + bf(-1/2) + cf(1/2) + E(f)$$

abbia grado di precisione massimo. Determinare tale grado di precisione.

1. L'equazione ha una radice reale α appartenente all'intervallo $[0.5, 1]$.
Il metodo di Newton converge (f' e f'' positive) e $\alpha \in [0.948, 0.949]$.
2. La matrice A ha matrice inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La soluzione del sistema è $b = (12, -2, -9)^T$

La matrice di iterazione di Jacobi è

$$H_J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det(H_J) = -2$ il metodo non converge.

3. Si impone la formula esatta per $f(x) = 1, x, x^2$ e si ottiene il sistema lineare

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ -a - 1/2b + 1/2c &= 0 \\ a + 1/4b + 1/4c &= 2/3 \end{aligned}$$

la cui soluzione è $a = 2/9$, $b = 2/3$, $c = 10/9$.

La formula non risulta esatta per $f(x) = x^3$ per cui il grado di precisione è 2.