METODI NUMERICI PER L'INGEGNERIA

INGEGNERIA CHIMICA

LUGLIO 2001.

==================================

1) È data la tavola di Butcher

$$
\begin{array}{c|ccc}
1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\
2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\
\hline
 & 0 & 2/3 & 1/3
\end{array} .
$$

a) Determinare la funzione di stabilità del metodo proposto.

b) Determinare l'intervallo reale di assoluta stabilità.

c) Determinare l'ordine di convergenza del metodo proposto.

2) Determinare i pesi a e b ed i nodi x_1 e x_2 affinché la formula di quadratura gaussiana

$$
\int_{-1}^{1} x^2 \, f(x) \, dx = af(x_1) + bf(x_2) + E(f)
$$

abbia grado di precisione massimo.

Posto $E(f) = Kf^{(s)}(\xi)$, calcolare K ed s.

1) La funzione di stabilità si determina dalle matrici $I-qA$ e $I-qA+qub^T$ che sono

$$I-qA=\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3}q & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}q & 1-\frac{1}{3}q & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}q & 1-\frac{1}{3}q \end{pmatrix}, I-qA+qub^T=\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3}q & \frac{2}{3}q & \frac{1}{3}q \\ -\frac{1}{3}q & 1+\frac{1}{3}q & \frac{1}{3}q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$R(q)=\frac{\det(I-qA+qub^T)}{\det(I-qA)}=\frac{1+\frac{1}{9}q^2}{(1-\frac{1}{3}q)^3}=\frac{27+3q^2}{(3-q)^3}.$$

L'intervallo reale di stabilità si calcola risolvendo la disequazione $|R(q)|<1$ che equivale a $-1<R(q)<1$. Risulta che il metodo è assolutamente stabile se $q<0$ o $q>\alpha$ con $\alpha\in[9.8, 9.81]$. Il metodo risulta almeno A_0-stabile. Calcolando alcune derivate successive di $R(q)$ e costruendo lo sviluppo di Taylor con punto iniziale $x_0=0$ si ottiene

$$R(q)=1+q+\frac{7}{9}q^2+O(q^3).$$

Lo sviluppo di Taylor coincide con quello dell'esponenziale solo per i primi due termini per cui il metodo ha ordine 1.

2) Si impone che la formula risulti esatta per $f(x)=1, x, x^2, x^3$ ottenendo il sistema

$$\begin{array}{lcl} a_1+a_2 & = & 2/3 \\ a_1x_1+a_2x_2 & = & 0 \\ a_1x_1^2+a_2x_2^2 & = & 2/5 \\ a_1x_1^3+a_2x_2^3 & = & 0 \end{array}$$

la cui soluzione è

$$a_1=a_2=1/3, \quad x_1=-x_2=\sqrt{3/5}.$$

Il grado di precisione è 3 poiché $E(x^4)=8/175$.
Da questo segue $s=4$ e $K=1/525$.