

METODI NUMERICI PER L'INGEGNERIA
INGEGNERIA CHIMICA
GIUGNO 2001.

=====

- 1)** Determinare i coefficienti $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ e β_3 in modo tale che il metodo a 3 passi

$$y_{n+1} - y_n = h(\beta_3 f_{n+3} + \beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

abbia ordine massimo indicando l'ordine raggiunto.

Calcolare il polinomio di stabilità del metodo.

Per $q = h\lambda = -1$ il metodo risulta assolutamente stabile?

- 2)** Determinare la spline cubica naturale che interpola la tabella di valori

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & w & 1 & -w \end{array}, \quad w \in R.$$

Posto $w = 1$, approssimare i valori appartenenti all'intervallo $[0, 2]$ per i quali risulta $f(x) = 0$.

- 1) Imponendo che risultino nulle le costanti c_1, c_2, c_3, c_4 ($c_0 = 0$) per costruzione del metodo) si ha il sistema lineare

$$\begin{array}{ccccccccc} \beta_0 & + & \beta_1 & + & \beta_2 & + & \beta_3 & = & 1 \\ & & 2\beta_1 & + & 4\beta_2 & + & 6\beta_3 & = & 1 \\ & & 3\beta_1 & + & 12\beta_2 & + & 27\beta_3 & = & 1 \\ & & 4\beta_1 & + & 32\beta_2 & + & 108\beta_3 & = & 1 \end{array}$$

la cui soluzione è $\beta_0 = \frac{9}{24}$, $\beta_1 = \frac{19}{24}$, $\beta_2 = -\frac{5}{24}$, $\beta_3 = \frac{1}{24}$. Risultando $c_5 \neq 0$ l'ordine del metodo è 4.

Il polinomio di stabilità è

$$\pi(q, \mu) = \frac{1}{24}q\mu^3 - \frac{5}{24}q\mu^2 + \left(\frac{19}{24}q - 1\right)\mu + 1 + \frac{9}{24}q.$$

Per $q = -1$ l'equazione $\pi(q, \mu) = 0$ è $\mu^3 - 5\mu^2 + 43\mu - 15 = 0$ che non ha tutte le radici minori di 1 in modulo. Segue che per $q = -1$ il metodo proposto non è assolutamente stabile.

- 2) Si impongono le condizioni per determinare la spline cubica richiesta ottenendo i due polinomi (di grado 3)

$$p_1(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \left(\frac{3}{2} - w\right)x + w,$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \left(\frac{9}{2} - w\right)x + w - 1.$$

Posto $w = 1$ i due polinomi divengono

$$p_1(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x + 1,$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{7}{2}x.$$

Solo l'equazione $p_2(x) = 0$ ha una soluzione reale appartenente all'intervallo $[1, 2]$ ed esattamente $\alpha = 3 - \sqrt{2}$.