

METODI NUMERICI PER L'INGEGNERIA
INGEGNERIA CHIMICA
GENNAIO 2001. I° APPELLO.

=====

1) È data la tavola di Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 1/6 & 1/6 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ \hline & 3/7 & 4/7 \end{array} .$$

- a) Determinare la funzione di stabilità del metodo proposto.
- b) Determinare l'intervallo reale di assoluta stabilità.
- c) Indicare quali valori del passo h sono idonei se si applica il metodo proposto all'integrazione del sistema

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 998 & -999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

2) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2a & a & 1 \\ a & 2a & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} .$$

- a) Determinare per quali valori reali di a la matrice A è definita positiva.
- b) Per quali valori reali di a la soluzione del sistema $Ax = b$ (b vettore assegnato) è approssimabile con il metodo del gradiente coniugato?
- c) Per quali valori del parametro a il metodo QR risulta convergente per l'approssimazione degli autovalori di A ?

- 1) La funzione di stabilità si determina dalle matrici $I - qA$ e $I - qA + qub^T$ che sono

$$I - qA = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{6}q & 0 \\ -\frac{1}{2}q & 1 - \frac{1}{4}q \end{pmatrix}, \quad I - qA + qub^T = \begin{pmatrix} 1 + \frac{11}{42}q & \frac{4}{7}q \\ -\frac{1}{14}q & 1 + \frac{9}{28}q \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$R(q) = \frac{\det(I - qA + qub^T)}{\det(I - qA)} = \frac{\frac{1}{8}q^2 + \frac{7}{12}q + 1}{\frac{1}{24}q^2 - \frac{5}{12}q + 1}.$$

L'intervallo reale di stabilità si calcola risolvendo la disequazione $|R(q)| < 1$ che equivale a $-1 < R(q) < 1$. Risulta che il metodo è assolutamente stabile se $q \in]-12, 0[$.

Il sistema proposto ha autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -1000$. Affinché il metodo sia assolutamente stabile i prodotti $h\lambda_1$ e $h\lambda_2$ devono appartenere all'intervallo di assoluta stabilità. Segue la condizione $0 < h < \frac{3}{250} = 0.012$.

- 2) La matrice è definita positiva se i minori principali di testa sono positivi per cui deve risultare

$$2a > 0, \quad 3a^2 > 0, \quad 6a^3 - 2a > 0.$$

Si ottiene quindi la condizione $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Il metodo del gradiente coniugato si applica a matrici definite positive per cui risulta idoneo per $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Il metodo QR converge se gli autovalori sono distinti in modulo.

L'equazione caratteristica è $\lambda^3 - 6a\lambda^2 + (11a^2 - 2)\lambda - 6a^3 + 2a = 0$. Gli autovalori (reali poichè la matrice è hermitiana) sono

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = \frac{5a + \sqrt{a^2 + 8}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{5a - \sqrt{a^2 + 8}}{2}.$$

Studiando le possibili relazioni tra i valori assoluti degli autovalori si conclude che gli autovalori sono distinti in modulo se $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$ e $a \neq \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$.