CALCOLO NUMERICO PER INGEGNERIA ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO[1] PER INGEGNERIA INFORMATICA
LUGLIO 2000

==================================

1) È data la formula di quadratura

$$\int_0^2 f(x)dx = af(x_0) + bf(2 - x_0) + E(f)$$

con $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare a, b, x_0 in modo che la formula abbia grado di precisione massimo.

b) Supposto che l'errore $E(f)$ sia esprimibile nella forma $E(f) = Kf^{(s)}(\xi)$ con $K \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$, $\xi \in [0, 2]$, determinare K e s.

c) Posto $f(x) = \sin(2x)$, indicare una maggiorazione di $\mid E(f) \mid$ (giustificando la risposta).

2) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & & & 1 \\ 1 & \gamma & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{507 \times 507}, \quad \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

a) La matrice A è riducibile?

b) Determinare i seguenti insiemi

$$\Gamma_1 = \{\gamma \mid A \text{ è convergente}\}$$

$$\Gamma_2 = \{\gamma \mid \text{ il metodo di Jacobi è convergente}\}$$

$$\Gamma_3 = \{\gamma \mid \text{ il metodo di Gauss-Seidel è convergente}\}$$

[1] Gli studenti di questo corso devono risolvere anche i quesiti posti sul retro del foglio

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO
PER INGEGNERIA INFORMATICA
LUGLIO 2000

====================================

1) Sia X una v.a. che assume valori $-2,-1,0,1,2$ con densità uniforme

$$P(\{X=i\})=\frac{1}{5}\,,\quad i=-2,-1,0,1,2,$$

e si ponga $Y=50X$.
Calcolare

a) la media $E[X]$;

b) la varianza $Var(X)$;

c) la probabilità $P(\{Y\leq 1\})$.

2) Un componente elettronico è composto da 8 pezzi. Ciascun pezzo ha un guasto con probabilità 0.2 indipendentemente dagli altri pezzi. La probabilità che un controllore individui un guasto in un singolo pezzo è 0.8. Il componente viene messo in vendita se non presenta difetti.

Si indichi con X_i, $i=1,\ldots,8$, le v.a. che assumono valore 1 o 0 se il pezzo i-esimo è , rispettivamente, guasto o efficiente.

Con Y_i, $i=1,\ldots,8$, si indichi la v.a. che assume valore 1 o 0 se il pezzo i-esimo risulta dopo il controllo, rispettivamente, guasto o efficiente.

Calcolare

a) la legge della v.a. $X=\sum_{i=1}^{8}X_i$;

b) la legge della v.a. $Y=\sum_{i=1}^{8}Y_i$;

c) la probabilità che un componente sia scartato;

1) Si impone che la formula sia esatta per $f(x) = 1, x, x^2$ ottenendo il sistema

$$\begin{array}{lcl} a + b & = & 2 \\ ax_0 + b(2 - x_0) & = & 2 \\ ax_0^2 + b(2 - x_0)^2 & = & 8/3 \end{array} .$$

Dalla prima equazione si ottiene $a = 2 - b$ che sostituita nella seconda equazione porta a $x_0(1 - b) = (1 - b)$ che è verificata per $x_0 = 1$ e/o $b = 1$. La soluzione $x_0 = 1$ fornisce una formula che non può verificare la terza equazione del sistema mentre la soluzione $b = 1$ ($a = 1$ dalla prima equazione) sostituita nella terza equazione fornisce $x_0 = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

La formula cercata è quindi

$$\int_0^2 f(x)dx = f(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) + f(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}) + E(f) .$$

Risultando $E(x^3) = 0$ e $E(x^4) = 8/45$ si deduce che il grado di precisione è 3. Da questi valori si ottengono $s = 4$ e $K = 1/135$.

Da $f(x) = \sin(2x)$ si ha $f^{(4)}(x) = 16\sin(2x)$, $\max_{x\in[0,2]} \mid f^{(4)}(x) \mid= 16$ e $\mid E(\sin(2x)) \mid< 16/135$.

2) La matrice A è chiaramente non riducibile avendo la codiagonale inferiore composta da elementi diversi da zero e l'elemento $a_{(1,507)} = 1$.

Gli autovalori di A si possono calcolare operando dapprima la traslazione dello spettro $B = A - \gamma I$. Gli autovalori di B sono le radici dell'equazione $\mu^{507} - 1 = 0$ per cui gli autovalori di A sono

$$\lambda_k = \gamma + \cos\frac{2k\pi}{507} + i\sin\frac{2k\pi}{507} , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 506.$$

Segue $\Gamma_1 = \emptyset$.

La matrice di iterazione di Jacobi è $H_J = -\frac{1}{\gamma}B$ per cui $\rho(H_J) = \frac{1}{|\gamma|}$ e $\Gamma_2 = \{\gamma \mid \mid \gamma \mid> 1\}$.

Con semplici calcoli si ricava la matrice di iterazione di Gauss-Seidel

$$H_{GS} = -\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1/\gamma \\ 0 & \cdots & 0 & 1/\gamma^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/\gamma^{507} \end{pmatrix}$$

per cui $\rho(H_{GS}) = \frac{1}{|\gamma^{507}|}$ e $\Gamma_3 = \Gamma_2$.

1) La media e la varianza risultano

$$E[X] = \frac{1}{5}(-2-1+0+1+2) = 0\,,$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] = \frac{1}{5}(4+1+0+1+4) = 2\,.$$

$$P(\{Y \le 1\}) = P(\{50X \le 1\}) = P(\{X \le \frac{1}{50}\}) = 3/5\,.$$

2) Si ha $P(\{X_i = 1\}) = 1/5$, $P(\{X_i = 0\}) = 4/5$. La legge della v.a. X è una bernoulliana ed esattamente $X \sim B(8, 1/5)$.

Per Y_i si ha

$$\begin{aligned} P(\{Y_i = 1\}) &= P(\{Y_i = 1 \mid X_i = 0\})P(\{X_i = 0\}) \\ &\qquad + P(\{Y_i = 1 \mid X_i = 1\})P(\{X_i = 1\}) \\ &= 0 \times 4/5 + 4/5 \times 1/5 = 4/25 \end{aligned}$$

e, ovviamente, $P(\{Y_i = 0\}) = 21/25$. Anche la v.a. Y è bernoulliana con $Y \sim B(8, 4/25)$.

Un componente è scartato se $Y \ge 1$ che ha probabilità

$$P(\{Y \ge 1\}) = 1 - P(\{Y = 0\}) = 1 - \left(\frac{21}{25}\right)^8\,.$$