CALCOLO NUMERICO PER INGEGNERIA ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO[1] PER INGEGNERIA INFORMATICA
GIUGNO 2000 - II^o Appello

==================================

1) È data la matrice $A \in I\!\!R^{n\times n}$ $(n > 1)$

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ u^T & -1 \end{pmatrix}, \quad B \in I\!\!R^{(n-1)\times(n-1)}, \; u \in I\!\!R^{n-1},$$

con B matrice simmetrica e definita positiva.

a) Calcolare la fattorizzazione LR della matrice A indicando sotto quali condizioni esiste.

b) Dimostrare che A non è definita positiva.

c) Posto $B = \gamma I - uu^T$ con $\gamma \in I\!\!R$ e $u = (1, 1, \ldots, 1)^T$, determinare i valori di γ per i quali la matrice B risulta definita positiva.

d) Dati B e u come al punto c) con $\gamma = 2n$, risolvere il sistema $Ax = \beta$ con $\beta = (2, 2, \ldots, 2)^T$.

2) È data l'equazione

$$e^{x-1} - 10x - 1 = 0\,.$$

a) Determinare il numero delle radici reali dell'equazione data e si indichino intervalli di separazione.

b) Dati i due metodi iterativi

$$x_{k+1} = \frac{1}{10}(e^{x_k-1} - 1)\,, \quad x_{k+1} = \log(10x_k + 1) + 1\,,$$

verificare se sono adatti ad approssimare le radici dell'equazione indicando, eventualmente, un punto iniziale x_0 che assicuri la convergenza.

[1] Gli studenti di questo corso devono risolvere anche i quesiti posti sul retro del foglio

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO
PER INGEGNERIA INFORMATICA
GIUGNO 2000 - II^o Appello
==================================

1) La coppia di variabili (X, Y) ha densità uniforme nella regione

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3 \ , \ 0 \leq y \leq 1\} \ .$$

Calcolare

a) la densità congiunta $f(x, y)$ e le densità marginali $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

b) le medie $E[Y]$ e $E[Y]$;

c) le varianze $Var(x)$ e $Var(Y)$;

d) la probabilità $P(\{X^2 + Y^2 - X - Y \geq -\frac{1}{4}\})$.

2) Un'urna contiene 10 palline, 2 Rosse, 3 Nere e 5 Bianche, uguali tra loro (a parte il colore). Si esegue una successione di estrazioni reimbussolando ogni volta la pallina. Sia X la v.a. che indica a quale estrazione si ha la prima pallina Rossa e Y la v.a. che indica a quale estrazione si ha la prima pallina Nera.
Calcolare

a) la probabilità $P(\{X = T, \ Y = S\})$;

b) la probabilità $P(\{Y < X\})$.

1) La fattorizzazione della matrice A esiste per ogni matrice B e per ogni vettore u ed è

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ u^T B^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} B & u \\ 0 & -1 - u^T B^{-1} u \end{pmatrix}.$$

La matrice A non è definita positiva poiché $det(A) < 0$ (come si vede anche dal determinante della matrice R).
La matrice $B = \gamma I - uu^T$ è simmetrica ed ha come autovalori gli autovalori di $-uu^T$ aumentati di γ. Poiché gli autovalori di $-uu^T$ sono $\mu_1 = 0$ con molteplicità $n-2$ e $\mu_2 = -u^T u = 1 - n$ con molteplicità 1, la matrice B è definita positiva se $\gamma > n - 1$.
Il sistema lineare si può scrivere nella forma ($\delta = (2, \ldots, 2)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $z \in \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{lcccc} (2nI - uu^T)y & + & uz & = & \delta \\ u^T y & & - \; z & = & 2 \end{array}.$$

Dalla seconda equazione si ricava $z = u^T y - 2$ che sostituito nella prima porta all'equazione

$$(2nI - uu^T)y + uu^T y - 2u = \delta \, .$$

Si ottiene quindi $y = \frac{2}{n}(1, \ldots, 1)^T$ e $z = -\frac{2}{n}$ per cui la soluzione cercata è $\frac{2}{n}(1, 1, \ldots, 1, -1)^T$.

2) L'equazione proposta ha due soluzioni reali $\alpha_1 \in I_1 = [-0.08, -0.04]$, $\alpha_2 \in I_2 = [4.5, 5]$.
Il primo metodo proposto ha funzione di iterazione $\phi_1(x) = \frac{1}{10}(e^{x-1} - 1)$ e quindi risulta $\phi_1'(x) = \frac{1}{10}e^{x-1}$. La derivata è positiva $\forall x$ ed è minore di uno per $x \in I_1$ mentre è maggiore di uno per $x \in I_2$.
Il secondo metodo ha funzione di iterazione $\phi_2(x) = \log(10x+1)+1$ e quindi risulta $\phi_2'(x) = \frac{10}{10x+1}$. La derivata è maggiore di uno per $x \in I_1$ mentre è positiva e minore di uno per $x \in I_2$.
Per avere la convergenza nei due casi si può scegliere, rispettivamente, $x_0 = -0.06$ e $x_0 = 4.75$.

1) La densità $f(x,y)$ è

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/3 & 0 \le x \le 3\,,\ 0 \le y \le 1\,, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Le densità marginali sono

$$f_X(x) = 1/3\,, \quad f_Y(y) = 1\,.$$

Per le medie e le varianze risulta

$$E[X] = 3/2\,, \quad E[Y] = 1/2\,,$$

$$Var(X) = 3/4\,, \quad Var(Y) = 1/12\,.$$

L'insieme delle coppie (X,Y) che verificano la condizione $X^2+Y^2-X-Y \ge -1/4$ è dato dai punti esterni al cerchio di centro $(1/2, 1/2)$ e raggio $1/2$ per cui

$$P(\{X^2+Y^2-X-Y \ge -\frac{1}{4}\}) = \frac{3-\frac{\pi}{4}}{3} = 1 - \frac{\pi}{12}\,.$$

2) La prima probabilità si ottiene semplicemente esaminando la successione di estrazioni che si deve avere perché risulti $X = T$ e $Y = S$:

$$P(\{X=T, Y=S\}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{T-1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^{S-T-1}\left(\frac{3}{10}\right) & T < S \\ 0 & T = S \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{S-1}\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{T-S-1}\left(\frac{1}{5}\right) & T > S \end{cases} .$$

La seconda probabilità risulta

$$\begin{aligned} P(\{S<T\}) &= \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{i=h+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{i-h-1}\left(\frac{1}{5}\right) \\ &= \sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}\frac{3}{10}\frac{1}{5}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{t} \\ &= \sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{h-1}\frac{3}{50}\,5 \\ &= \frac{3}{10}\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{h} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$