CALCOLO NUMERICO PER INGEGNERIA ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA

CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO[1] PER INGEGNERIA INFORMATICA

GIUGNO 2000 - I^o Appello

==================================

1) Sono date le matrici $A, S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 15 & -3 & 10 \\ 2 & 6 & -2 & -1 \\ -7 & 15 & 2 & 10 \\ -3 & -4 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -2I & I \\ 3I & I \end{pmatrix}$$

con I matrice identica di ordine 2.

a) Calcolare la matrice S^{-1}.

b) Calcolare la matrice $B = S^{-1}AS$.

c) Calcolare gli autovalori A.

d) Per la risoluzione del sistema lineare $Bx = c$, c vettore assegnato, i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel risultano convergenti? Giustificare la risposta.

2) Sono date le due funzioni

$$\phi_1(x) = x(x-2)\,, \qquad \phi_2(x) = x(2-x)\,.$$

a) Determinare i punti fissi di $\phi_1(x)$ e quelli di $\phi_2(x)$.

b) Studiare la convergenza dei metodi

$$x_{k+1} = \phi_1(x_k)\,, \qquad x_{k+1} = \phi_2(x_k)$$

ai rispettivi punti fissi indicando in ciascun caso un intervallo di valori iniziali x_0 che assicurino la convergenza.

c) Individuare l'insieme $W = \{x^* : \phi_1(\phi_1(x^*)) = x^*\}$ e descrivere il comportamento delle successioni $x_{k+1} = \phi_1(x_k)$ con $x_0 \in W$.

[1] Gli studenti di questo corso devono risolvere anche i quesiti posti sul retro del foglio

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO
PER INGEGNERIA INFORMATICA
GIUGNO 2000 - I^o Appello

===================================

1) Per la coppia di variabili (X, Y) è assegnata la densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} Ke^{-(2x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $K \in \mathbb{R}$.

a) Determinare K.

b) Calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

c) Calcolare $E[Y]$ e $Var(Y)$.

d) Calcolare $P(\{X \geq Y\})$.

2) Si hanno tre urne U_i. $i = 1, 2, 3$, uguali contenenti palline bianche (B) e palline nere (N) uguali tra loro (a parte il colore). La distribuzione delle palline è la seguente:

$$U_1 \Leftrightarrow (2B, 3N)\ , \quad U_2 \Leftrightarrow (1B, 4N)\ , \quad U_3 \Leftrightarrow (3B, 2N)\ .$$

a) Si estrae una pallina da ogni urna: qual è la probabilità di avere, rispettivamente, $0, 1, 2, 3$ palline bianche?

b) Si estrae una pallina da un'urna a caso. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

c) Senza reinbussolare la pallina estratta al punto b), si estrae una seconda pallina: qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca sapendo che la prima pallina estratta è bianca?

1) La matrice S^{-1} è

$$S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -I & I \\ 3I & 2I \end{pmatrix} .$$

Si ha quindi

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori di A sono gli autovalori di B per cui

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 , \quad \lambda_3 = 2 , \quad \lambda_4 = -1 .$$

Le matrici di iterazione di Jacobi e di Gauss-Seidel sono

$$H_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad H_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Risuta evidente che entrambe le matrici hanno raggio spettrale nullo per cui i due metodi convergono.

2) I punti fissi di $\phi(x)$ sono le soluzioni dell'equazione $x(x-2) = x$ e quindi $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 3$. Per $\phi_2(x)$ si risolve l'equazione $x(2-x) = x$ da cui $\alpha_3 = 0, \alpha_4 = 1$. Da $\phi_1'(x) = 2x - 2$ e $\phi_2'(x) = 2 - 2x$ si ha

$$\phi_1'(\alpha_1) = -2 \, , \; \phi_1'(\alpha_2) = 4 \, , \; \phi_2'(\alpha_3) = 2 \, , \; \phi_2'(\alpha_4) = 0 \, ,$$

per cui l'unica convergenza assicurata è quella di ϕ_2 al punto fisso $\alpha_4 = 1$. L'intervallo dei possibili valori iniziali si ricava dalla disequazione $\mid 2-2x \mid < 1$ le cui soluzioni sono $1/2 < x < 3/2$.

Per trovare i punti fissi di $\phi_1(\phi_1(x))$ si risolve l'equazione $x(x-2)(x^2-2x-2) = x$ che ha soluzioni

$$x_1 = 0 \, , \; x_2 = 3 \, , \; x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \, , \; x_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \, .$$

Se si parte da x_1 o x_2 si ha una successione costante mentre se si parte da x_3 o da x_4 si hanno successioni a valori alternati.

1) Si ha $1 = \int_{R^2} f(x,y)dxdy$ e quindi

$$K^{-1} = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(2x+y)}dxdy = 1/2$$

da cui $K = 2$. Risulta poi

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} f(x,y)dy = 2e^{-2x}\ ,\ f_Y(y) = \int_0^{+\infty} f(x,y)dx = e^{-y}\ ,$$

$$E[Y] = \int_0^{+\infty} y f_Y(y)dy = 1\ ,\ E[Y^2] = \int_0^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy = 2\ ,\ Var(Y) = 1\ .$$

Infine

$$P(\{X \geq Y\}) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{x} f(x,y)dy = 1/3\ .$$

2) Per avere $0, 1, 2, 3$ palline bianche si possono avere, rispettivamente, i seguenti casi con corrispondenti probabilità :

$$\begin{aligned}
0 &\implies P(NNN) = 24/125 \\
1 &\implies P(BNN) + P(NBN) + P(NNB) = 58/125 \\
2 &\implies P(BBN) + P(NBB) + P(BNB) = 37/125 \\
3 &\implies P(BBB) = 6/125
\end{aligned}$$

La probabilità che l'unica pallina estratta sia bianca è

$$P(B_1) = \sum_{i=1}^{3} P(B \mid U_i)P(U_i) = \frac{2}{5}\ .$$

La probabilità che la seconda pallina sia bianca sapendo che la prima è bianca è data da

$$\begin{aligned}
P(B_2 \mid B_1) &= \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\sum_{i=1}^{3} P(B_2 \cap (B_1, U_i))}{\frac{2}{5}} \\
&= \frac{5}{2}\left(\frac{2}{15}\frac{21}{60} + \frac{1}{15}\frac{20}{60} + \frac{3}{15}\frac{22}{60}\right) \\
&= \frac{5}{2}\frac{32}{225} = \frac{16}{45}\ .
\end{aligned}$$