CALCOLO NUMERICO PER INGEGNERIA ELETTRICA, ELETTRONICA, INFORMATICA

CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO[1] PER INGEGNERIA INFORMATICA

FEBBRAIO 2001 - I^o Appello

==================================

1) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Determinare l'insieme $\mathcal{W}$ degli α per i quali il sistema ha almeno una soluzione.
Per $\alpha \notin \mathcal{W}$, indicare il numero di soluzioni nel senso dei minimi quadrati determinandole nel caso in cui sia $\alpha = 1$.

2) Determinare il numero delle radici reali dell'equazione

$$\log(2 \mid x \mid) + Kx - 1 = 0$$

al variare del parametro reale K. Posto $K = 1$ determinare intervalli di separazione delle radici reali e studiare a convergenza dei metodi iterativi

$$x_{i+1} = 1 - \log(2 \mid x_i \mid) ,$$

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} e^{1-x_i} .$$

Approssimare le radici con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$.

[1] Gli studenti di questo corso devono risolvere anche i quesiti posti sul retro del foglio

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA
CALCOLO NUMERICO E PROBABILISTICO
PER INGEGNERIA INFORMATICA
FEBBRAIO 2001 - I^o Appello
====================================

1) Si lanciano 2 dadi (non truccati) e si osserva che la somma X dei due numeri è pari.
Quale è la probabilità che X sia minore di 9?

2) SiA X una variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $[-1, 1]$ e sia $Y = X^2 + 2$.

a) Calcolare i valor medi $E[X]$ e $E[Y]$.

b) Calcolare $Cov(X, Y)$ e dire se le due variabili sono correlate.

c) Calcolare $P(Y > 2.25 \mid X < 0)$.

3) Si lancia una moneta equilibrata 50 volte e si osserva il numero X di volte che esce "croce".
Calcolare P(X=22).

1) La seconda e la terza equazione sono proporzionali a parte il termine noto. Si osserva che queste equazioni possono essere verificate entrambe se e solo se $\alpha = 0$ e che la soluzione del sistema è $x = (1, 0)^T$.
Per $\alpha \neq 0$ si cerca la soluzione nel senso dei minimi quadrati che risulta unica se $r(A) = 2$. Tale condizione si verifica per $\alpha \neq 0, 1$.
Se $\alpha \neq 0, 1$, si tratta di risolvere il sistema $A^T A x = A^T b$ con

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha^2 + 2 & \alpha^2 + \alpha + 1 \\ \alpha^2 + \alpha + 1 & 2\alpha^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

La soluzione è

$$x = \left(\frac{-\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1}, \frac{\alpha^2}{\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1} \right)^T.$$

Se $\alpha = 1$ il sistema ha infinite soluzioni $x = (u, -u + 2/3)^T$, $u \in \mathbb{R}$.

2) Con la separazione grafica data dalle due funzioni $y = \log(2 \mid x \mid)$, $y = 1 - Kx$, si deduce che l'equazione può avere 1,2 o 3 soluzioni reali. Si devono trovare i valori di K per i quali le due curve sono tangenti. Si risolve il sistema

$$\begin{cases} \log(2 \mid x \mid) & = & 1 - Kx \\ \frac{1}{x} & = & -K \end{cases}$$

trovando $K = \pm 2e^{-2}$. Si ha quindi che l'equazione ha

$K = 0$ 2 soluzioni reali $x = \pm \frac{e}{2}$,

$0 < \mid K \mid < 2e^{-2}$ 3 soluzioni reali,

$\mid K \mid = 2e^{-2}$ 2 soluzioni reali di cui una di molteplicità 2,

$\mid K \mid > 2e^{-2}$ 1 soluzione reale.

Posto $K = 1$ si ha una unica soluzione reale $\alpha_1 \in [0.5, 1] = I$.
Poiché il primo metodo proposto ha $\phi'(x) = -\frac{1}{x}$ non è assicurata la convergenza alla radice.
Il secondo metodo ha $\mid \phi'(x) \mid = \frac{1}{2} e^{1-x} < 1$, $x \in I$, per cui converge alla radice α.
Approssimando α si ottiene $\alpha \in]0.68, 0.69[$.

1) La probabilità che la somma dei due dadi sia pari è 1/2.
La probabilità che si ottenga una somma pari minore di 9 è la somma delle probabilità che si ottenga 2,4,6 o 8 per cui

$$\begin{aligned} P(X<9) &= P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)+P(X=8) \\ &= \frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{7}{18}\,. \end{aligned}$$

Infine risulta

$$P(X<9 \mid X \text{ pari}) = \frac{7/18}{1/2} = \frac{7}{9}\,.$$

2) Si ha banalmente $E[X]=0$ mentre

$$E[Y]=E[X^2+2]=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(x^2+2)dx=\frac{7}{3}\,.$$

Da $Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$, essendo $E[XY]=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(x^3+2x)dx=0$, si ha $Cov(X,Y)=0$ per cui le due v.a. non sono correlate.
Risulta

$$\begin{aligned} P(Y>2.25 \mid X<0) &= P(X^2+2>2.25 \mid X<0) \\ &= P(X^2>0.25 \mid X<0) \\ &= \frac{P(X<-0.5)}{P(X<0)}=\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

3) Si ha

$$P(X=22)=\binom{50}{22}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} \simeq 0.0788\,.$$