Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 05/09/2015

COGNOME........................ NOME........................

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 05/09/2015

1) Si vuole calcolare la funzione

$$f(x, y) = x/y^2$$

nel punto $P_0 = (\sqrt{2}, e)$.
Si indichi un insieme di indeterminazione a cui appartiene P_0.
Supponendo di commettere un errore assoluto algoritmico $|\delta_a| \leq 10^{-2}$ e di introdurre i dati con errori assoluti $|\delta_x| \leq 10^{-2}$ e $|\delta_y| \leq 10^{-2}$, quale sarà il massimo errore assoluto $|\delta_f|$?

2) Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

3) Determinare i punti fissi a cui può convergere lo schema iterativo

$$x_{n+1} = \frac{1 + 2x_n - x_n^4}{2x_n^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

4) Determinare l'equazione della retta $y = ax + b$ che approssima nel senso dei minimi quadrati la funzione $f(x)$ di cui si conoscono i valori

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	5	10

5) Calcolare i pesi a_0 e a_1 in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_0^1 x^2\, f(x)\, dx \simeq a_0 f(0) + a_1 f(1)$$

abbia grado di precisione (algebrico) massimo. Indicare il grado di precisione ottenuto.

Soluzione

1) Consideriamo l'insieme di indeterminazione $D = [1,2] \times [2,3]$. Si ha quindi $A_x = \sup_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \frac{1}{4}$ e $A_y = \sup_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{1}{2}$.
Ne segue che

$$|\delta_f| \le |\delta_a| + A_x|\delta_x| + A_y|\delta_y| = \frac{7}{400}\,.$$

2) Sommando ad A la matrice $(\alpha - 1)I$ si ottiene una matrice piena con tutti elementi uguali ad α i cui autovalori sono $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\mu_3 = 3\alpha$. Gli autovalori di A sono quindi

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 - \alpha, \qquad \lambda_3 = 2\alpha + 1.$$

3) I punti fissi sono le soluzioni dell'equazione $x = \frac{1+2x-x^4}{2x^2}$ per cui si ha $\alpha_1 = -1$ (molteplicità 3) e $\alpha_2 = 1$.

4) L'equazione delle retta si ricava risolvendo il sistema lineare $A^T A x = A^T f$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 18 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è $a = 3$, $b = 0$. La retta cercata ha equazione $y = 3x$.

5) Imponendo che la formula sia esatta per $f(x) = 1$ e $f(x) = x$ si ottengono i pesi $a_0 = \frac{1}{12}$ e $a_1 = \frac{1}{4}$. La formula ha grado di precisione $m = 1$ poiché $E_1(x^2) \neq 0$.