

---

---

# Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 15/09/2010

---

---



COGNOME ..... NOME .....

MATRICOLA... 

--	--	--	--	--	--

## RISPOSTE

1)

2)

3)

4)

5)

**N.B.** Le risposte devono essere giustificate ed i dati dello studente devono essere scritti a penna con la massima chiarezza.

---

---

# Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 15/09/2010

---

---



1) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Calcolare i valori reali  $\alpha$  per cui  $\det(A) = 0$ .

b) Calcolare i valori reali  $\alpha$  per i quali la matrice  $A$  ha autovalori tutti reali.

2) Calcolare i punti fissi a cui può convergere il processo iterativo

$$x_{n+1} = \frac{6 + 2x_n - x_n^3}{3x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

3) Calcolare la fattorizzazione  $LR$  della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Determinare i parametri reali  $\alpha$  e  $\beta$  in modo tale che il polinomio di interpolazione della tabella di valori

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & \alpha & -1 & 2 & -2 \\ \hline f(x) & 2 & 4 & \beta & 12 & 16 \end{array}$$

sia  $P(x) = 3x^2 - x + 2$ .

5) Determinare il grado di precisione algebrico della formula

$$J_2(f) = \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

utilizzata per approssimare l'integrale  $I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$ .

# SOLUZIONE

- 1) La matrice risulta riducibile e simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è il prodotto dei determinanti dei blocchi diagonali. Segue  $\det(A) = \det(B) = 3(\alpha - 8)$  per cui  $\det(A) = 0$  se e solo se  $\alpha = 8$ .

Gli autovalori di  $A$  sono gli autovalori di  $B$  e quindi gli autovalori dei due blocchi diagonali. Dal primo blocco si ha  $\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$  per cui, per qualunque valore reale di  $\alpha$ , non si potranno avere tutti autovalori reali.

- 2) I punti fissi del processo iterativo sono le soluzioni dell'equazione  $x = \frac{6+2x-x^3}{3x}$  e quindi

$$\alpha_1 = -3, \quad \alpha_{2,3} = \pm\sqrt{2}.$$

- 3) La fattorizzazione  $LR$  della matrice è

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 4) Deve risultare  $P(\alpha) = 4$  e  $P(-1) = \beta$  per cui

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\frac{2}{3}, \quad \beta = 6.$$

- 5) La formula data risulta esatta per  $f(x) = 1, x, \dots, x^5$  mentre non lo è per  $f(x) = x^6$ . Segue che il grado di precisione algebrico è  $m = 5$ .