Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 23/07/2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 23/07/2016

1) Si vuole calcolare la funzione

$$f(x,y) = x - y$$

in un punto $P_0 \in [0,1] \times [2,3]$ con un errore assoluto $|\delta_f| \leq 10^{-2}$.
Indicare come eseguire l'operazione e con quale errore introdurre x e y per rispettare tale limitazione.

2) Il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ di una matrice A assume i seguenti valori:

λ	0	1	2	-1	-2
$P(\lambda)$	-2	1	6	-3	-2

Quale è la dimensione della matrice A?

3) L'equazione

$$e^x + 3x - 2 = 0$$

ha una sola radice reale $\alpha \in]0,1[$.
Il metodo iterativo

$$x_{n+1} = \frac{2 - e^{x_n}}{3}$$

risulta idoneo per approssimare tale radice?

4) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Calcolare $\|A\|_2$.

5) È data la formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{8}\left(f(0) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1)\right) + E_3(f)\,.$$

Si determini il grado di precisione di tale formula.

Soluzione

1) Risultando $A_x = A_y = 1$, basta introdurre i due valori x e y con massimo errore assoluto $|\delta_x|, |\delta_y| \leq \frac{10^{-2}}{4}$ (basta troncare alla terza cifra decimale) e calcolare il risultato della operazione arrotondando alla seconda cifra decimale.

2) Dal quadro delle differenze si deduce che il polinomio che interpola i valori dati è di grado 2 per cui la dimensione di A risulta uguale a 2.

3) La funzione di iterazione del metodo proposto è $\phi(x) = \frac{2-e^x}{3}$. Risultando $\phi'(x) = -\frac{e^x}{3}$ si ha $|\phi'(x)| \leq \frac{e^x}{3} < 1$ per cui il metodo può convergere.

4) Gli autovalori della matrice $B = A - I$ sono $\mu_1 = 0$ e $\mu_{2,3} = \pm\alpha\sqrt{2}$. Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_{2,3} = 1 \pm \alpha\sqrt{2}$. La matrice A è reale e simmetrica per cui

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_{i=1,2,3} |\lambda_i| = 1 + \sqrt{2}|\alpha| \, .$$

5) La formula proposta risulta esatta per $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ ma non per x^4 per cui ha grado di precisione $m = 3$.